実践報告

中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導

－「空間図形」と「相似な図形」での教材開発と実践－

稲熊　紀昭*・美澤　将史*・松元　新一郎**

（*静岡大学教育学部附属島田中学校　**静岡大学教育学部）

Teaching of Geometry to Promote Comprehensive and Expansive Thinking in Junior High School

Development of teaching materials and practice in “Solid geometry” and “similar figures”

Inaguma Noriaki, Misawa Masashi, Matsumoto Shinichiro

要　旨

本稿は，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形の指導について，これまでとは異なる教材を開発して実践し，その有効性を検証することを目的とする．そのために，中 1 の単元「空間図形」で「正多面体の回転対称性」について，また中 3 の単元「相似な図形」で「中点連結定理の利用」について，それぞれ教材化して実践を行った．授業中の生徒の様子や授業後の感想等から，統合的・発展的に考察する活動が多く観察され，教材の有効性を示すことができた．

キーワード：統合的・発展的な考察，空間図形，回転対称，相似な図形，中点連結定理

1. はじめに

本研究の目的は，「統合的・発展的な考察」に焦点を当て，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導のあり方を追究することである．

数学的な思考力の具体的な内容として，熊倉(2011)は以下のような能力を挙げている．

ア　数学的に推論する力
イ　多様に考える力
ウ　統合・発展・一般化する力
エ　分類・整理する力
オ　見通しを立て予想する力
カ　検証する力

この中の「ウ　統合・発展・一般化する力」について，本研究では，以下のａ～ｄの4点を明らかにしてきた(加藤・杉山・熊倉，2018；加藤・杉山・熊倉，2020；加藤・杉山・熊倉，2021；鈴木・加藤・熊倉，2016；鈴木・加藤・熊倉，2017；杉山・美澤・松元・山田，2022；美澤・稲熊・松元，2023；稲熊・美澤・松元，2024；稲熊・美澤・松元・峰野，2025)．

a　中学校の教科書を分析した結果，発展的な考え方を育成するような問題設定は，教科書では扱いが少ない．

b　発展的な考え方に関する先行研究を分析した結果，発展的な考え方をいくつかのタイプに分類することができ(橋本，2001；片桐，1988；菊池，1997)，その中で「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践(例えば，福田，2009)は，必ずしも多く実践されていない．

c　「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践として，以下の教材を開発して実践を行った．

中1「図形の移動の方法を考える」「最短距離の作図」「多角形の面積を二等分する直線」
中2「くの字の法則を見つける」「くり抜いた図形の角の和」「三角形の対称軸の本数」「多角形の直角の個数」「ボロノイ図」「星形五角形の発展」「動点がつくる角」
中3「相似な図形の面積比」「三角形の辺の比」「三平方の定理の導入」「折り返しの図形」「二円の交点を通る四角形」「円周の内部や外部にできる角の大きさ」

実践の結果から，「発展させることで数学の理解が深まるように設定を工夫する」，「難易度が高くなり過ぎないように配慮する」，「一般化することのよさを感じられる教材にする」，「多様な方法を分類する活動を取り入れる」，「生徒が統合的・発展的に考察することの価値を認める」等が有効であるとの示唆を得た．

d　中 3 時の各単元において，統合的・発展的に考える活動を継続して取り入れた結果，統合的・発展的に考えようとする態度が身に付いていることが調査結果から読み取れた．

a～d の 2015～2024 年度の研究成果を踏まえて，本稿では，中 1 と中 3 の図形の内容の中で，これまでとは異なる統合的・発展的な考察を促す教材を開発して実践を行い，授業中の生徒の反応や授業後の感想等を分析して，教材の有効性を検証する．

なお，これまでの研究では，片桐(1988)の統合的な

考え方を参考にして「統合的な考え方」，「発展的な考え方」を次のように規定してきた.

＜統合的な考え方＞

多くの事象をばらばらにせず，広い観点から本質的な共通性を抽象し，同じものとしてまとめていく考え方であり，次の2つに分類できる.

［C1］複数の事象を，共通なものでまとめる.

［C2］複数の事象を，その中の1つに統合したり一般化したりする.

＜発展的な考え方＞

1つのことが得られても，さらによりよい方法を求めたり，これを基にして，より一般的な，より新しいものを発見したりしていこうとする考え方であり，次の2つに分類できる.

［E1］問題の条件を変える.

［E2］思考の観点を変える.

このうち，これまで2つに分類してきた「統合的な考え方」を見直し，中島(1982/2015)を参考にして次の①，②，③の3つの場合に分類する.

また，中島(1982/2015)では，それぞれの統合の具体例が小学校算数科の内容であるため，中学校数学科の図形領域における具体例を以下のように挙げた.

＜統合的な考え方＞

①集合による統合

はじめは異なったものとしてとらえられていたものについて，ある必要から共通の観点を見出して一つのものにまとめる場合．上記の［C1］にあたる.

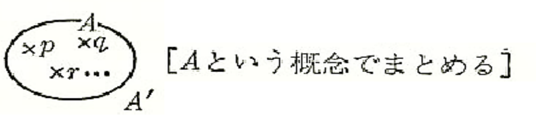


図1　集合による統合(中島，1982/2015，p.127)

【具体例】

- すべての面が合同な正多角形で，どの頂点のまわりにも面の数が同じであって，へこみのない立体を，「正多面体」としてまとめる場合.
- 円 O の円周角∠APB と中心角∠AOB について，中心 O が∠APB の辺上にあるとき，中心 O が∠APB の内部にあるとき，中心 O が∠APB の外部にあるとき，それぞれについて 2∠APB=∠AOB が成り立つことを証明し，「円周角の定理」としてまとめる場合.

②拡張による統合

はじめに考えた概念や形式が，もっと広い範囲（はじめの考えでは含められない範囲のものまで）に適用できるようにするために，はじめの概念の意味や形式を一般化して，もとのものも含めてまとめる場合．上記の［C2］にあたる.

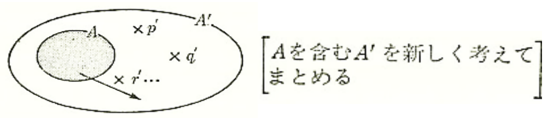


図2　拡張による統合(中島，1982/2015，p.128)

【具体例】

- 直線上の 1 点からの垂線の作図が，任意の角の二等分線として使えるようにする場合.
- n 角形の内角の和について，三角形の内角の和が 180°であることを活用して，四角形や五角形を三角形に分割して考えることで三角形の個数に着目し，$180°(n-2)$と一般化する場合.

③補完による統合

すでに知っている概念や形式だけでは，適用できない場合が起こるとき，補うものを加えて，「完全になる」ようにまとめる場合

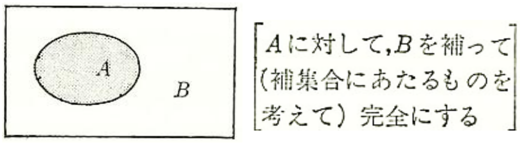


図3　補完による統合(中島，1982/2015，p.129)

【具体例】

- 「四角形の辺の中点同士を結ぶと平行四辺形になる」ことに対して（一般に中学校数学科では多角形はへこんだ形を考えない），4 つの線分で囲まれた図形の場合も同じことがいえるかどうかを，いわゆるブーメラン型（凹四角形）に着目して考え出す場合.
- 平行な 2 直線の間の領域で 2 線分が交わる図（いわゆるくの字型の$\angle x=\angle a+\angle b$ の性質）について，2 直線が平行ではない場合を考えると元の性質が成り立たなくなる．しかし，平行ではない 2 直線の見込む角を$\angle c$とすると$\angle x=\angle a+\angle b+\angle c$ となり，2 直線が平行であれば$\angle c=0$と考えて統合して考える場面.

2. 本稿の目的

本稿の目的は，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形の指導について，これまでとは異なる教材を開発して実践し，その有効性を検証することである.

3. 研究の方法

以下の手順に従って，研究を進める.

(1) 中 1，中 3 の図形指導の内容について，過去に実践した教材とは異なる統合的・発展的な考え方を育成する効果的な教材を開発する.

(2) (1)で開発した教材を用いて実践を行い，授業中の生徒の反応およびワークシートの記述，授業後の感想等から，統合的な考え方を育む教材としての有効性について検証する.

4. 統合的・発展的な考え方の育成を重視した教材の検討

(1) 「正多面体の対称性」の教材の検討

平成 29 年告示の学習指導要領（文部科学省, 2018）では，第 1 学年「B 図形」領域に「(2)イ空間図形を直線や平面図形の運動によって構成されるものと捉えたり，空間図形を平面上に表現して平面上の表現から空間図形の性質を見いだしたりすること」が思考力，判断力，表現力等として位置付けられている．このことに関連して，藤原（2021）は，空間図形の学習において平面と空間を関連付けて考察し表現する力の育成が求められているとしている．また，島田（1990）は，「平面図形から空間図形への類推」で，二次元から三次元への類推が比較的類似を見つけやすいものであるとして，空間における平行と垂直や，2 点から等距離にある点の軌跡が，その 2 点を結ぶ線分の垂直二等分面になることなどを挙げている．そこで，小学校第 6 学年で学習した対称な図形について，三次元になったときにどのような命題が考えられるかを教材化しようと考えた．

ある教科書では正多面体について，本文中には定義と，5 種類しかないという事実のみが掲載されており，正多面体が 5 種類しかない理由や展開図，双対性についてはコラムで掲載されているのみに留まっている．このことは他社の教科書でも同様で，正多面体がもつ性質について触れる機会はあまりないといえる．正四面体と正六面体を除けば，正多面体は底面や側面といった要素で分割して考えることが難しい，念頭操作では苦労することが予想される立体である．正多面体は，手元において観察したり，操作したりすることができる具体物の存在は不可欠であり，同様の具体物を使用した実践も多く存在する（例えば，川上，2004）．デジタルソフトで表現された立体を画面（平面）上で見るだけでは，辺や面などの要素の位置関係などが分かりづらい．そこで，本実践では「ポリドロン」（図 4）を配付し，具体的操作を通して学習に取り組めるようにした．

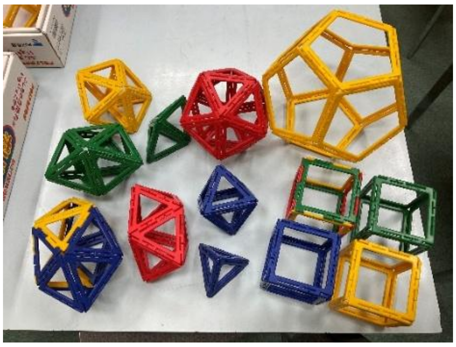


図 4　生徒に配付した立体模型

生徒がこれらの教具を用いて，正多角形と正多面体を往還しながら正多面体の対称性を調べる学習を通して，統合的・発展的に考察することをねらいとした．なお，三次元での対称性のうち，鏡映対称性については他の実践が存在する（たとえば小野田，2010）が，回転対称性については管見の限り実践されていない．本実践では，統合・発展を通して三次元での点対称性と回転対称性について考察することとした．以下は教材の考察である．

まず原題について，二次元から三次元への類推を念頭に，正多角形の対称性についての命題を原題とした．

①正多角形は，②ある点に対して③180°回転したら，元の図形と重なるだろうか．

これは，小学校第 6 学年で学習する二次元での点対称についての問いである．正n角形のnが偶数の場合には元の図形と重なり，対称の中心は，向かい合う頂点同士，辺の中点同士を結んだ線分の交点によって得られることや，nが奇数の場合は元の図形と重ならないことが生徒たちから挙がると予想される．

続いて，原題の①～③を発展の視点として，どのように条件変えによる発展が考えられるかを以下に記す．

①「正多角形」に着目した場合

二次元での正多角形を三次元で考えたとき，正多角形の定義から類推して，「全ての辺が等しく，全ての角が等しい立体」を考えることができる．この場合，全ての面が正多角形になることが考えられるので，「全ての面が合同な 1 種類の正多角形でできている立体」として考える．候補となるのが，正多面体 5 種類（正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体）（図 5）と，正多面体を除いたデルタ多面体 5 種類（デルタ六面体，デルタ十面体，デルタ十二面体，デルタ十四面体，デルタ十六面体，デルタ二十面体）となる．（図 6）

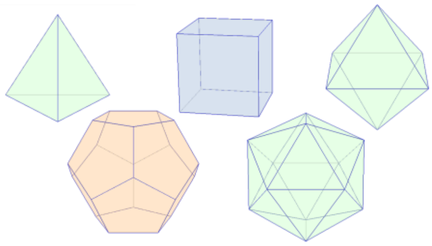


図 5　5 種類の正多面体

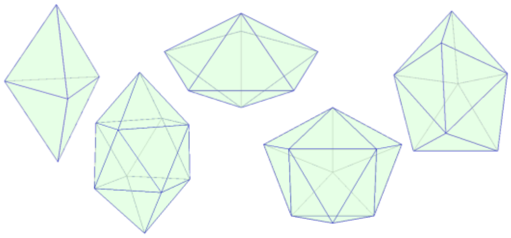


図 6　正多面体でないデルタ多面体

原題と同様に正多面体やデルタ多面体を対称の中

心となる点について 180°回転させようとすると，全ての頂点を反転させることが困難であることに気づく．そこで，二次元における点対称が，180°回転した結果，元の頂点と移動後の頂点が反転の関係になっていることに注目し，三次元においても全ての頂点が反転して元の立体と重なればよいという形に再定義することができる（図 7）．また，頂点に限らず辺や面も同様の反転が発生し，このことは二次元における点対称と矛盾しない．なお，再定義をするにあたっては，村田（2020）を念頭に，定義の階層性，的確性，最小性，整合性に留意する．

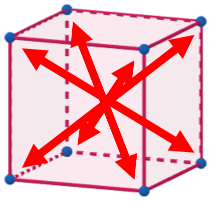


図 7　三次元における頂点同士の反転の関係

正多面体は，正四面体を除けば点対称の性質をもっており（図 8），その中心は対応する頂点同士を結んだとき（図 9 左）や辺の中点同士を結んだとき（図 9 中央），面の中心同士を結んだとき（図 9 右）のそれぞれ交点であることがわかる．なお，この面の中心とは，正三角形や正五角形の各頂点と向かい合う辺の中点とを結んだ中線の交点であり，正方形では対角線の交点である．全ての頂点からの距離が等しい外心としての性質や中線の交点という重心としての性質をもつ点であるが，本実践ではその点を「面の中心」と呼称することとする．

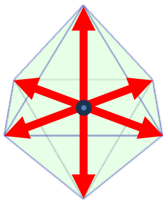


図 8　正八面体の頂点の反転性とその中心

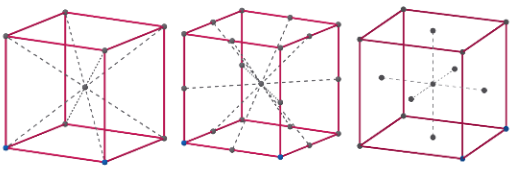


図 9　正六面体の対称の中心

正多面体ではないデルタ多面体では，頂点を反転した先に頂点がある場合だけではないため，点対称性をもたない．例えば，デルタ六面体は 5 つの頂点のうち 2 つは反転の関係にあるものの，残りの 3 つの頂点は反転先が辺となり，頂点同士の反転の関係は見られない（図 10）．

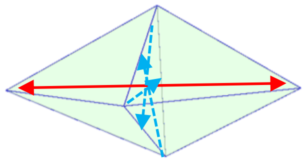


図 10　デルタ六面体の頂点の反転関係

以上のことから，正四面体を除く正多面体には点対称性があり，正多面体でないデルタ多面体は点対称性をもたないことがわかる．このことは集合による統合が期待できるものの，正多面体かそうでないかという集合での統合ではないため，生徒にとって納得感のある結論とは言えないことが予想される．しかし，このことが他の対称性について調べたいという意欲につながることは期待できる．

②「ある点」③「180°回転」に着目した場合

二次元の点対称として原題では 180°回転としたが，図形によっては 180° 以外の角度でも元の図形と重なる場合が存在する．例えば正方形ならば 180° 以外に 90°，270°，360°でも重なり，4 回対称となる．なお，ここでは 360°より大きい角度については考えないこととする．正n角形の場合，図形の中心について$\frac{360°}{n}$ずつ回転すれば元の図形と重なり，n回対称となる（n位の巡回群；一松，1983）．

このことを三次元で考えるとき，立体を回転させるために点を中心にするのではなく，直線（軸）に対して回転させる必要がある．そこで，このことを立体の回転対称性として定義し，正多面体やデルタ多面体について考える．

正多面体のうち，例えば正六面体には回転対称となる軸が 3 種類ある．向かい合う面の中心同士を結んだもの（図 11 左），向かい合う頂点同士を結んだもの（図 11 中央），向かい合う辺の中点同士を結んだもの（図 11 右）である．

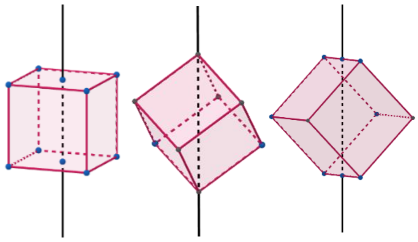


図 11　正六面体の 3 種類の回転軸

太田（2013）は空間図形を観る活動では，対象と視点を定め明らかにして考えることが必要であるとしている．特に，これらの中で「F_2：見取図，投影図や展開図などの空間図形の 2 次元表示（視覚で見ている場合）」を対象として，「V：視覚における実際の視点」や「Vi：頭の中で想像している視点（第 2 の自分の視点）」を視点として立体を見ることが重要であると考える．平面図形に比べて空間図

形を認識することに慣れていない生徒たちにとって，この対象と視点を明らかにすることで，学習を円滑に進めることができるようになると考える．このことは，小学校第 4 学年で見取図や展開図，本単元で投影図を学習することから，立体をある視点から見ることによって平面図形と捉えることで，その性質を理解しやすくなると考える．この場合の回転の角度については，回転軸を鉛直方向に配置したとき，正六面体を上から見る，つまり「回転軸が点になるように立体を平面として見る」ことで調べられる．向かい合う面の中心同士を結んだ軸の場合は前述の二次元での正方形の回転と同様になるため，90°，180°，270°，360°の 4 回対称となる（図 12 左）．向かい合う頂点同士を結んだ軸での場合は，正六角形の中心と 3 つの頂点を結んだものになるため，120°，240°，360°の 3 回対称となる（図 12 中央）．

向かい合う辺の中点同士を結んだ軸の場合は，長方形の長辺の中点を結んだ線分の中点に軸がある形になるため，180°，360°の 2 回対称となる（図 12 右）．このように，回転対称の角度を調べる際には，軸の結び方に関わらず，軸が点に見える方向から立体を平面として見ることが有効であるという集合による統合が期待できる．

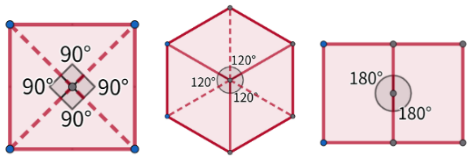


図 12　軸が点になるように正六面体を見た図

他の正多面体についても同様に回転対称性について調べると，対称となる回数と軸の数は表 1 の通りとなる（正多面体の変換群；一松，1983）．なお，表中の「辺」とは辺の中点，「面」とは面の中心を指す．また，回転対称性の個数を数えるときには，各回転軸での回転のうち，360°回転は，すべての点を動かした結果が，何も動かさない場合と同じになるため，同一のものとみなせることに注意する必要がある．

表 1　正多面体の回転対称性

面の数	4	6	8	12	20
頂点・頂点		3 回 4 本	4 回 3 本	3 回 10 本	5 回 6 本
辺・辺	2 回 3 本	2 回 6 本	2 回 6 本	2 回 15 本	2 回 15 本
面・面		4 回 3 本	3 回 4 本	5 回 6 本	3 回 10 本
頂点・面	3 回 4 本				
個数	12 個	24 個	24 個	60 個	60 個

これらの結果から，辺の中点同士を結んだ回転軸については，いずれも 2 回対称になること，対称の軸の本数はそれぞれの正多面体の（辺の本数）÷2 と等しいということが，集合による統合として得られる．同様に，頂点同士を結んだ回転軸については，1 つの頂点に集まる面の数と同じ回数で対称になること，対称の軸の本数は正多面体の（頂点の数）÷2 となる．面の中心同士を結んだ回転軸については，それぞれの正多面体の面となる正n角形について，n回対称になり，軸の本数は正多面体の（面の数）÷2 となる．これらのことは，全て集合による統合によって得られる．また，面の中心同士を結んだ回転軸の場合の対称となる回数については，二次元の正多角形の対称の回数と同様の結果が得られ，拡張による統合と捉えることもできる．

正四面体は頂点同士，面の中心同士の回転軸をもたないが，頂点と面の中心を結ぶ軸によって回転対称性をもち，その回数と軸の本数は，正四面体以外の正多面体の頂点同士，面の中心同士を結んだ回転軸の場合の両方の性質をもつ．このことも，集合による統合によって得られる性質である．

正六面体の頂点同士の回転軸の場合と正八面体の面の中心同士の回転軸の場合は対称の回数と軸の本数が一致している．このことは，正六面体の面の中心同士と正八面体の頂点同士，正六面体の辺の中心同士と正八面体の辺の中心同士にもいえ，同様に正十二面体と正二十面体の間にも同様のことがいえる．これは，正多面体の三次元回転群において，正六面体群と正八面体群，正十二面体群と正二十面体群が同型であることが理由となっている．正六面体の各面の中心を頂点として双対な正八面体をかいた場合，回転軸が一致し，その逆もいえる（図 13）．正十二面体と正二十面体においても同様である（図 14）．

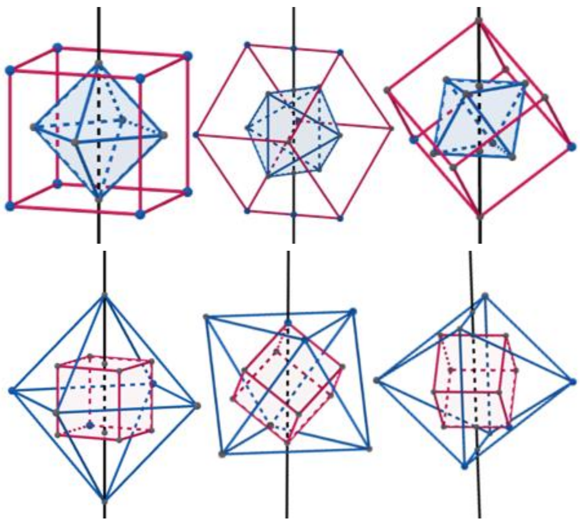


図 13　正六面体と正八面体の双対性と回転軸

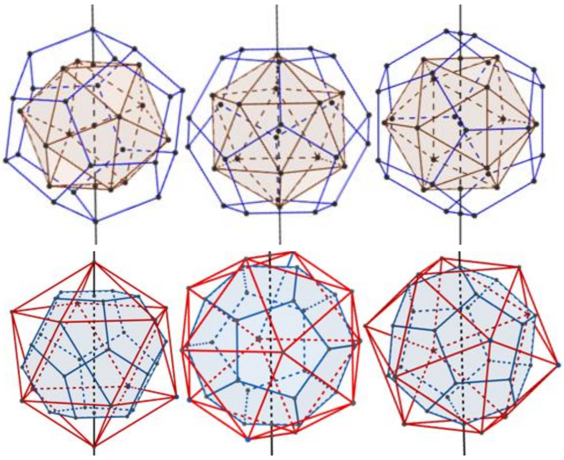


図 14　正十二面体と正二十面体の双対性と回転軸

正四面体は自己双対であり，正四面体の各面の中心を結んでできた正四面体と回転軸を共有する（図 15）．

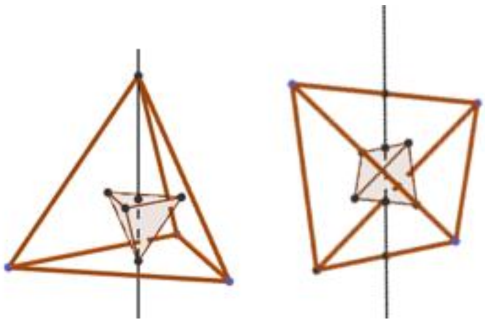


図 15　正四面体の自己双対と回転軸

一方，デルタ多面体の回転対称性については，表 2 の通りとなる．

表 2　デルタ多面体の回転対称性

面の数	6	10	12	14	16
頂点・頂点	3 回 1 本	5 回 1 本			4 回 1 本
辺・辺			2 回 1 本 - - - - 2 回 2 本		2 回 4 本
面・面				3 回 1 本	
頂点・辺	2 回 3 本	2 回 5 本		2 回 3 本	
個数	6 個	10 個	4 個	6 個	8 個

これらの中で，向かい合う頂点同士を結んだ回転軸の場合は，1 つの頂点に集まる面の数と同じ回数で対称になる．これは正多面体の場合と同様になり，条件を正多面体からデルタ多面体まで拡張した統合であるといえる．一方，デルタ十二面体，デルタ十四面体は，頂点同士の回転軸をもたず，全てのデルタ多面体で頂点同士を結んだ回転軸をもつとは言えない．このことは，辺の中点同士，面の中心同士を結んだ回転軸についても同様である．

頂点と辺の中点を結んだ回転軸について，全てが 2 回対称になっているという共通点がある．これは，辺の中点が固定されることによって，その辺は両端が入れ替わるしかないことがわかる．ゆえに，2 回対称になっている（図 16）．このことから，辺の中点をつかって回転軸を設定する場合，もう一方が頂点でも辺でも 2 回対称になるということが，補完による統合によって得られる．

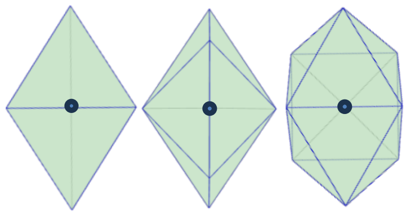


図 16　デルタ多面体の辺の中点を通る回転軸

また，デルタ十二面体には，辺の中点同士を結んだ回転軸が 2 種類ある（図 17）．正多面体の辺が互いに区別できず，辺の中点同士を結んでも 2 種類の場合に区別することはできないため，正多面体でない立体でのみ起こることであるといえる．

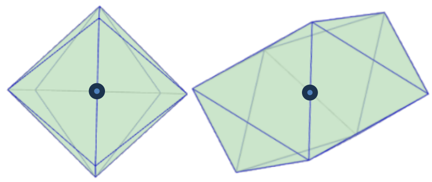


図 17　デルタ十二面体の辺の中点同士を通る回転軸

また，正多面体でないデルタ多面体は他のデルタ多面体と双対でない．例えば，デルタ六面体の双対な立体は，側面が長方形の正三角柱である．そのため，正多面体のように，デルタ多面体同士で共有する回転軸をもつことはない．

このように，正多面体だけでなく，正多面体ではないデルタ多面体についても回転対称性を調べることで，正多面体の性質がより浮き彫りになるため，集合による統合が起こりやすくなると考える．

(2)　「中点連結定理」の教材 2 の検討

平成 29 年告示の学習指導要領（文部科学省, 2018）では，第 3 学年「B 図形」領域の目標及び内容の「平行線の線分の比についての性質（イの(イ)）の中で，「図形に対する見方をより豊かにするとともに，図形の性質が成り立つ理由を数学的な表現を用いて説明したり，統合的・発展的に捉えたりすることを通して，論理的に考察し表現する力を養う」という記述がある．思考力・判断力，表現力等の育成のために，図形に対する見方を豊かにし，論理的に考察し表現する力を高

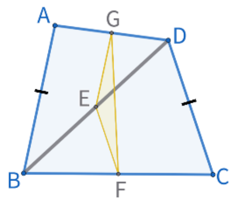
めていく必要がある．そのために，統合的・発展的に考察できる教材を授業実践していくことが重要である．

また，近藤裕ら（2024）は，「図形の包摂関係に関する指導時間の減少により，包摂関係の理解が不十分な生徒が増加している可能性が考えられる」と調査結果から結論付けているが，中学校 2 学年で四角形の包摂関係について学習した後，それを振り返る機会を意図的に設定していない場合が多い．

本研究では，第 3 学年において，図形の包摂関係の理解を深めると共に，統合的・発展的に考察することをねらいとした．以下は教材の考察である．

まず原題について考察する．中点連結定理を利用して図形の性質を考察する問題は多く存在する（例えば中村他，2022）．図形の包摂関係の理解を深め，統合的・発展的に考察するために，本校が使用している教科書（池田他，2025）の中点連結定理を利用した，図形の性質を証明する問題を基にする（図 18）．

右の図のように，AB＝DC である四角形 ABCD で，対角線の BD の中点を E，辺 BC，AD の中点をそれぞれ F，G とします．次の問に答えなさい．



(1) △EFG はどんな三角形ですか．

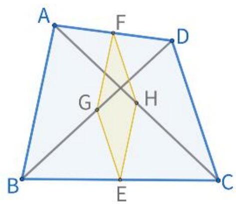
(2) (1)のことがらを証明しなさい．

図 18　教科書の問題（池田他，2025，p.172）

まず，△EFG がどんな三角形であるかを聞き，次にその証明する問題である．図 18 の△DAB において点 G，E はそれぞれ辺 DA，DB の中点であるから，EG=1/2BA となる．同様に，△BCD において，点 F，E はそれぞれ辺 BC,BD の中点であるから，EF=1/2DC となる．AB=DC だから EG=EF となり，△EFG は EG=EF の二等辺三角形となることがわかる．こうして，中点連結定理を利用して，図形の性質を証明することができる．

また，章末のまとめ問題には，次のような問題が扱われている（図 19）．

右の図の四角形 ABCD で，辺 BC，AD，BD，AC の中点をそれぞれ E，F，G，H とするとき，次の問に答えなさい．



(1)　四角形 FGEH は平行四辺形であることを証明しなさい．

(2)　AB＝DC のとき，四角形 FGEH はどんな四角形になりますか．

図 19　教科書の問題（池田他，2025，p.184）

四角形 FGEH が「平行四辺形」であることを予想させて平行四辺形であることを証明し，さらに，AB=DC の時には，どんな四角形になるかを考える問題である．

△CAB において，点 H，E はそれぞれ辺 CA,辺 CB の中点であるから HE∥AB，HE=1/2AB となる．△DAB において，点 F,G はそれぞれ辺 DA,DB の中点であるから，FG∥AB，FG=1/2AB となり，HE∥FG，HE=FG で 1 組の対辺が平行で等しいから，四角形 FGEH は平行四辺形となる．

同様に，△ACD と△BCD についても中点連結定理が成り立ち，FH=1/2DC，EG=1/2DC が言える．AB=DC のとき，HE=FG=FH=EG となるため四角形 FGEH は「ひし形」となる．

この場面において，「平行四辺形」と「ひし形」の包摂関係が想起される．平行四辺形に，すべての辺が等しいという条件が加わったことで，ひし形になる．こうした包摂関係も考えることができる．

そして図 18 から図 19 は「対角線の本数」を 1 本から 2 本に発展させたことにより，「どんな三角形になるか」から「どんな四角形になるか」へと考察が変わっている．三角形で言えた図形の性質が四角形に変わっても言えるのかを考えることも統合的・発展的に考察する力の育成に繋がると言える．

さらに，この 2 つの問題をさらに統合的・発展的に考察する教材とするために，図 20 のように四角形 ABCD の辺 AB と DC の中点，対角線の BD の中点を結んでできる△GEF をもとの四角形の「内側にできる図形（三角形）」と設定し，生徒に次の原題と共に提示する．

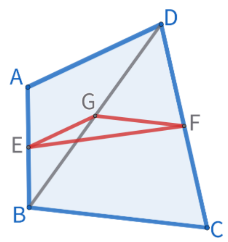


図 20　四角形 ABCD の内側にできる△GEF

②四角形 ABCD で，③1 本の対角線 BD の中点を G，辺 AB，CD の中点をそれぞれ E，F とすると①△EFG はどんな三角形になる可能性があるだろう？根拠を用いて説明しよう．

続いて原題の①～③を発展の視点として，どのように条件変えによる発展が考えられるかを以下に記す．

①「どんな三角形になる可能性があるか」について

まず「二等辺三角形」について考える．その条件は，四角形 ABCD で AD=BC の時である（図 21）．

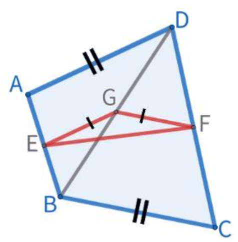


図 21　△EFG が二等辺三角形の場合

次に「直角三角形」を考える．その条件は，四角形 ABCD で DA⊥CB のときである．△EFG が直角三角形になるときは次のような場合である（図 22 左）．

辺 AD の延長線上と BC の延長線上が交わる点を H とする．△ABD において中点連結定理が成り立つので，DH∥GE となる．同じように，△BCD において中点連結定理が成り立つので，CH∥FG となる．さらに図 22 左のように FG と GE の延長した直線と DH，CH の交点をそれぞれ点 J，I とすると，GJ∥IH，GI∥JH となり，DH⊥CH から∠AHB=90° で，四角形 JHIG が長方形となることがわかり，∠JGI=90° となり，∠EGF=90° となる．よって，△EFG は直角三角形となる．

ここで，三角形の包摂関係を考えると，「二等辺三角形」の条件と「直角三角形」の条件の両方が成り立つ時に，「直角二等辺三角形」となることがわかる（図 22 右）．

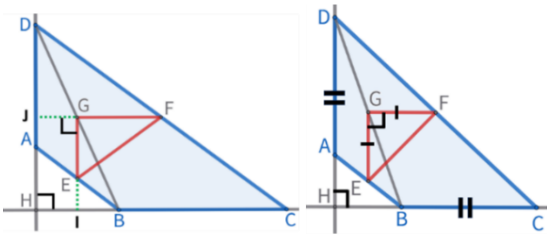


図 22　△EFG が直角三角形（左）
直角二等辺三角形（右）になる場合

さらに，二等辺三角形と正三角形の包摂関係から，頂角が 60° の二等辺三角形が正三角形となることが予想される．そこで，「正三角形」になる場合は二等辺三角形になる時の AD=BC，∠AHB=120° の時だと言える（図 23）．

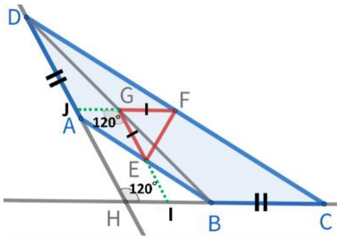


図 23　△EFG 正三角形になる場合

△ABD と△BCD において中点連結定理が成り立つことから，図 22 左と同様に，GJ∥IH，GI∥JH となる．よって，四角形 JHIG は平行四辺形となり，∠AHB=120° から，対角が等しくなるので∠JGI=120° となる．よって∠EGF=60° となり，AD=BC から GE=GF となり，正三角形と言える．ここから四角形 JHIG は常に平行四辺形になることがわかる．図 22 左のように，∠AHI=90° のとき，長方形になる．ここからも平行四辺形と長方形の関係といった図形の包摂関係を想起することができる．

また，四角形 JHIG が平行四辺形ということから，「∠EGF=180° －∠AHB」と一般化することができる．△EFG がどんな三角形になるかを考える上で，平行四辺形 JHIG をもとにして「AD を延長した DH，BC を延長した CH の交わり方」と「AD と BC の長さの関係」に着目して考えるという統合的考察を行うことができる．

②「四角形 ABCD」について

四角形 ABCD が「凹四角形の場合」や「ちょうちょ型」についても，同じ条件で成り立つことがいえる．たとえば，四角形 ABCD が凹四角形の場合，図 24 左のようなことが考えられ，線分 BD を凹四角形 ABCD の対角線とみなすと，外側となる．GE を延長した直線と BC の交点を I，FG と AD の交点を J とすると，四角形 GIHJ ができる．△ABD で中点連結定理より，EG∥AD，EG=1/2AD がいえる．△BCD で中点連結定理より，GF∥BC，GF=1/2BC がいえる．GE∥AD より GI∥JH，GF∥BC より GJ∥IH となることから，四角形 GIHJ が平行四辺形となる．∠AHB=60° の時，∠EGF=60° なり，AD=BC の時，GE=FG となるので，△EFG は正三角形となる．

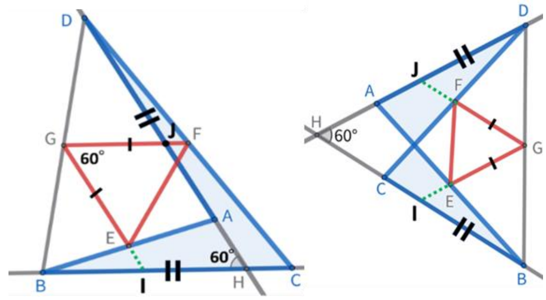


図 24　△EFG で，四角形 ABCD が凹四角形（左）
ちょうちょ型（右）の場合

ちょうちょ型については，たとえば，図 24 右のような場合が考えられる．線分 BD をちょうちょ型 ABCD の対角線とみなすと，外側となる．ちょうちょ型については，三角形の時と同様に，四角形として扱うわけではないが，これまでと同じような考察や説明方法で考えることができる．直線 DA，BC の交点を H とし，GE の延長線と BH との交点を I，FG と DH との交点を J とする．△BCD において，中点連結定理より，FG∥BC，FG=1/2BC がいえる．△ABD において，中点連結定理より，EG∥AD，EG=1/2AD がいえる．FG∥BC，EG∥AD より，GJ∥BH，GI∥DH がいえるので，四角形 JHIG は平行四辺形となる．∠AHC=60° の時，対角である∠EGF=60° となる．AD=BC のとき，GE=FG となるので，△EFG は正三角形となる．

③「1 本の対角線」について

対角線を 2 本にすることによって，四角形 GEKF ができる（図 25）．図 19 と同じ問題であるが，原題から次のような課題となる．

②四角形 ABCD で，③2 本の対角線 AC，BD の中点をそれぞれ K，G，辺 AB，CD の中点をそれぞれ E，F とすると①四角形 GEKF はどんな四角形になる可能性があるだろう？根拠を用いて説明しよう．

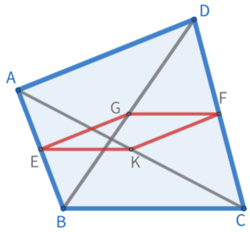


図 25　対角線が 2 本の時にできる四角形 GEKF

まず「平行四辺形」のになる場合である．△ABC において，中点連結定理より，EK // BC，EK=1/2BC が言える．△BCD において，中点連結定理より，GF // BC，GF=1/2BC が言える．これより，1 組の対辺が平行で等しいので，四角形 GEKF は点 G，E，K，F が一直線上になる場合を除いて，平行四辺形となることがいえる．

次に「ひし形」の場合がある．△ABD において，中点連結定理より，GE // AD，EG=1/2AD がいえる．△ACD において，中点連結定理より，KF // AD，KF=1/2AD がいえる．四角形 GEKF は平行四辺形になるから，AD=BC という条件が成り立つと，すべての辺が等しくなり，ひし形になる．（図 26）

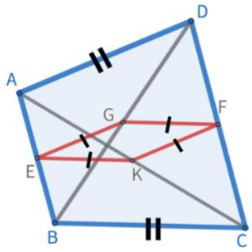


図 26　四角形 GEKF がひし形になる場合

三角形の時に考えたことをもとに，四角形の包摂関係を想起させ，平行四辺形にどんな条件を加えていけば，良いかを考えていくことができるため，「長方形」となる場合は，AD⊥BC の時だと考えられる．辺 AD，BC を延長した時に交わる点を H とし，FG の延長線と DH の交点を J，GE の延長線と CH の交点を I とすると，GF // BC，KF // AD，∠AHB=90°より，四角形 JHIG は長方形となる．よって∠EGF=90°となるので，四角形 GEKF は長方形となる．（図 27 左）

次に「正方形」となる場合である．長方形になる時の条件である∠AHB=90°に加えて，辺の長さが等しいことが条件となる．よって，AD=BC のとき，中点連結定理より，GF=GE となり，四角形 GEKF は正方形となる．（図 29 右）対角線が 1 本の時の△EFG と同様な考えた方で，四角形 GEKF について考察することができる．

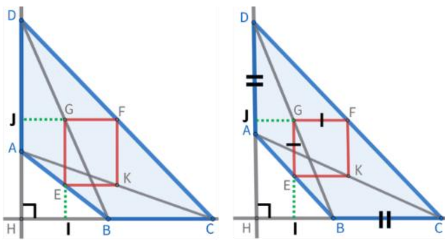


図 27　四角形 GEKF が長方形（左）正方形（右）の場合

また，△EFG の時と同様に四角形 JHIG は，平行四辺形となり，「∠EGF=180°－∠AHB」と一般化することができる．長方形の場合や正方形の場合は，∠AHB=90°のため，四角形 JHIG は長方形となる．

さらに，発展的に捉え，四角形ABCD が「凹四角形の場合」や「ちょうちょ型」についても，△EFG の時と同じ条件で成り立つことがいえる．たとえば，四角形 ABCD が凹四角形の場合，図 28 左のようなことが考えられ，対角線 BD は，凹四角形 ABCD の外側となる．GE を延長した直線と BC の交点を I，FG と AD の交点を J とすると，四角形 GIHJ ができる．△ABD で中点連結定理より EG // AD，EG=1/2AD がいえる．△BCD で中点連結定理より，GF // BC，GF=1/2BC がいえる．EG // AD より GI // JH，FG // BC より GJ // IH となることから，四角形 GIHJ が平行四辺形となる．さらに，∠AHB=90°の時，四角形 GIHJ は長方形となるため，∠JGE=90°となる．AD=BC の時，GE=FG となるので，四角形 GEKF は正方形となる．

ちょうちょ型については，三角形の時と同様に，四角形として扱うわけではないが，これまでと同じような説明方法で考えることができる．

辺 AD，BC の交点を H とし，GE の延長線と BH との交点を I，FG と DH との交点を J とする．△BCD において，中点連結定理より，GF // BC，GF=1/2BC がいえる．△ABD において，中点連結定理より，EG // AD，EG=1/2AD がいえる．GF // BC，GE // AD より，GJ // BH，GI // DH がいえるので，四角形 JHIG は平行四辺形となる．よって，∠AHB=90°の時，四角形 JHIG は長方形となるので，∠EGF=90°となる．AD=BC の時，FG=GE となるので，四角形 FKEG は正方形となる．(図 28 右)

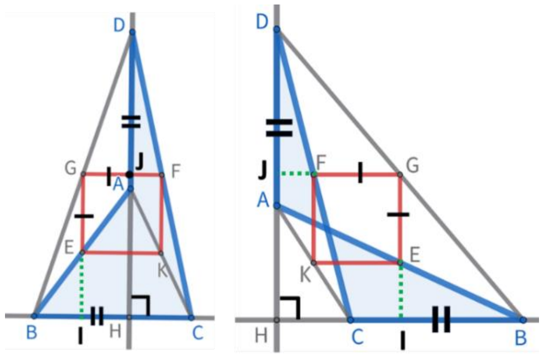


図 28　四角形 GEKF で四角形 ABCD が凹四角形（左）
ちょうちょ型（右）の場合

以上のことから，この教材は，外側の四角形 ABCD や内側の三角形や四角形がどんな四角形になるかを，発展的に条件を変えて考察することができる．

条件を変える中で，同じように考えたり，まとめたりできるため，統合的・発展的な考察ができる教材と言える．

また，三角形や四角形の包摂関係を想起し，条件について見通しをもつことができるため，生徒にとって

図形の包摂関係の理解を促す教材といえる．

5．中 1「正多面体の対称性」の実践

(1)　授業の概要

中 1 の単元「空間図形」の第 1 節「空間図形の見方」において，4(1)で述べた「正多面体の対称性」についての教材を扱った実践を行った．

なお，授業の分析は，授業を撮影したビデオ映像，個人追究時に記述したワークシート（追究用紙，ロイロノートのカード），授業後の感想等をもとに行った．

①　単元計画

単元計画は表 3 の通りであり，本時は第 6 時である

表 3　「空間図形の見方」の小単元計画

時間	学習内容
1	**【合同な正多角形でできる立体】拡張** ・合同な正多角形を面とする凹みのない立体をつくる．
2 3	**【合同な正多角形でできる多面体の種類】** **集合　補完** ・正六角形のみで多面体をつくることができない理由を見出す． ・合同な正多角形でできる多面体が 10 種類しかない理由を見出す．
4	**【正多面体とデルタ多面体の違い】集合** ・正多面体やデルタ多面体の頂点や辺，角，面の数などから性質を見出す．
5	**【三次元での点対称】拡張　補完** ・二次元での点対称から三次元での点対称を類推し，正多面体やデルタ多面体の点対称性について調べる．
6 (本時) 7	**【三次元での回転対称性】集合** ・正多面体やデルタ多面体の回転対称性について調べ，正多面体の性質を見出す
8 9	【立方体の切断面】拡張 ・立方体の 3 点を通る平面で切断する活動から，平面の決定方法を見出す．
10 11	【三次元での鏡映対称性】集合　拡張 ・二次元での線対称から三次元で線対称を類推し，正多面体やデルタ多面体の鏡映対称性について調べる．
12	節のまとめ・レポート

②　本時の実施時期：2025 年 11 月

③　対象生徒：国立大学附属中学校 1 年生 36 名

④　授業の目標：正六面体の回転対称性について，模型を使って調べる活動を通して，回転軸の種類に応じて本数や角度が決まることに気づき，正六面体や正多面体の性質を見出すことができる（思考・判断・表現）

(2)　授業展開と生徒の反応

①　課題 1 の提示と生徒の活動（第 5 時）

最初に正多角形の性質について生徒に問いかけた．生徒からは辺の長さや角が全て等しいことや，小学校で学習した点対称や線対称などの性質が挙げられた．次に，二次元の性質から三次元の性質を類推する形で，正多面体で同様の性質が成り立っているのかを確かめることにした．辺の長さや角度はすぐに等しいことが確認されたが，対称性については三次元で定義されていなかったので，まずは点対称について考えることとなった（図 29）．

図 29　正多角形の各性質（左）から正多面体（右）への類推

次に以下のような課題 1 を提示した．

【課題 1】正多面体は点対称といえるだろうか．

生徒たちは始め，二次元での点対称の定義が「中心に対して 180°回転すると元の図形に重なること」だと考え，立方体の模型を回転させて点対称になるか確かめていた．模型をある方向に 180°回転させると確かに元の立方体と重なるが，立方体の頂点に着目した生徒から，「全ての頂点が回転によって中心の反対側に来なければおかしい」という意見があり，全ての頂点が中心の反対側に移動する回転方法について考えることになった．しかし，そのような回転方法を発見することができなかったため，他の生徒から「回転することよりも，頂点が反対側に移動することが大事なのだから，回転しなくてもいいのではないか」という意見が出た．そこで，三次元の点対称について，「頂点が，ある点に対して反対の位置にあり，ある点から元の頂点までの距離と等しい場所に移動すること」と再定義し，立方体は点対称な立体であると結論付けた（図 30）．

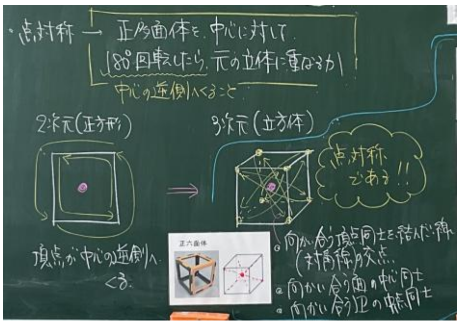


図 30　三次元の点対称の再定義

同様に，正六面体以外の正多面体についても同様に点対称であるかを調べる活動を行った．その結果，正四面体を除く正多面体が点対称であることや，正多面体でないデルタ多面体は点対称でないことに気づき，三次元での点対称の条件として，向かい合う頂点のペアがもれなく存在することや，向かい合う辺や面がそれぞれ平行であることを挙げていた（図 31）．これらは，正多面体やデルタ多面体から見出した集合による統合の結果と考えられる．

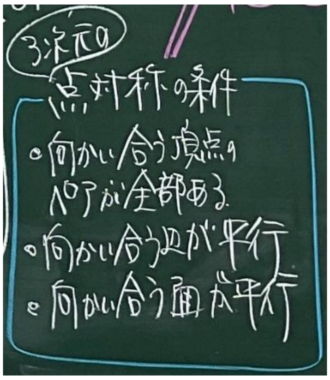


図 31　三次元での点対称の条件

三次元の点対称について考える中で，生徒からは，「点対称以外の対称について調べたい」「正四面体も含む，正多面体の性質を見つけたい」という意見が出て，他の対称性について調べることを確認して授業を終えた．

②　課題 2 の提示と生徒の反応（第 6 時）

本時では，まず生徒とのやりとりを通して，正多角形の点対称の関係を原題として設定した．

【原題】①正多角形は，②ある点に対して③180°回転したら，元の図形と重なるだろうか．

次に，原題の条件を変えて別の対称について考えられないか生徒に尋ねた．生徒からは，線対称を念頭に②を直線に変えたいという意見もあったが，正多角形が③の角度が 180°でなくても重なることが生徒から挙がり，回転させる角度を変える課題 2 を設定した．

【課題 2】①正多角形は，②ある点に対して③決まった角度回転したら，元の図形と重なるだろうか．

生徒からは，例えば正方形は中心の点（対角線の交点）に対して 1 周回転するまでの間に，90°，180°，270°，360°回転するときに重なることが挙げられた．この中で 180°のときが点対称であることを確認しつつ，次にこの角度が正方形のどの部分に当たるのかを問うと，生徒からは，中心角という意見と，正方形の内角の倍数という意見の 2 つが挙がった．他の正多角形と比較したときに，内角の倍数だと矛盾が生じることに気づき，中心角の角度によって回転する角度が決定することを確認した．ここで，三次元への拡張を念頭に回転対称を「ある図形を，点を中心に決められた角度回転したとき，元の図形と重なる（見た目が変わらない）状態」と定義した．

③　課題 3 の提示

二次元での回転対称の定義を基にして，課題 2 の条件変えを行った．前時に，立体を点について回転させるとうまくいかないことがわかっていた生徒から，点ではなく軸について回転させてはどうかという意見が出て，それを採用した課題 3 を次のように設定した．

【課題 3】①正多面体は，②ある軸に対して③決まった角度回転したら，元の図形と重なるだろうか．

正多面体の中で，まずは正六面体について考えることとした．

④　課題 3 の個人追究と小集団追究

4 人組の小集団に立体模型と竹串，模型の面をボール紙で覆ったパーツ（図 32）を配付し，生徒たちは立方体の回転対称性について調べていった．

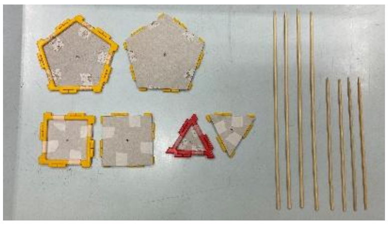


図 32　生徒に配付した竹串と面のパーツ

生徒たちは個人で追究する中で，回転軸は 3 種類あり，それぞれ向かい合う頂点同士（図 33 左），向かい合う面の中心同士（図 33 中央），向かい合う辺の中点同士（図 33 右）を結ぶ直線であることに気づいていた．向かい合う辺については，中点以外にも向かい合う頂点から等しい距離にある点であれば回転軸としてもよいのではないか，と考える生徒もいたが，小集団追究を通して，1 回転しないと元の立体と重ならないことが確認されていた（図 34）．

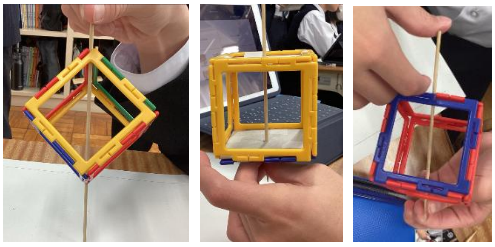


図 33　正六面体の 3 種類の回転軸

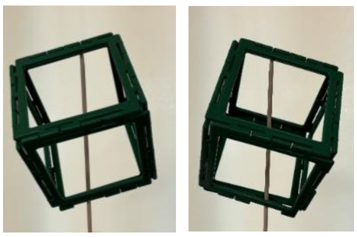


図 34　向い合う辺の中点以外を結んだ軸

軸の種類については早い段階で気づいている生徒が大半であったが，回転させるときの視点が定まらず，どのように立体を見ればよいのか苦労している生徒や，視点は定まったものの，回転する角度について疑問に思っている生徒が多かった．例えば，向かい合う頂点同士を結んだ回転軸の場合，軸と正六面体との交点（頂点）には 3 つの直角が集まっているため，90°，180°，270°の 3 回対称であるという意見（図 35）と，1 回転する間に元の立体と重なることが 3 回あり，1 回転が 360°なのだから，それを 3 等分して 120°，240°，360°の 3 回対称であるという意見（図 36）の 2 つが見られた．

図 35　ロイロノートでの生徒の記述 1

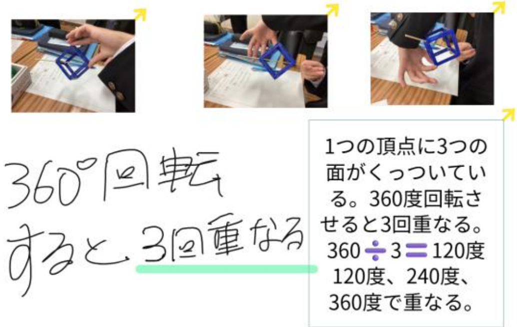


図 36　ロイロノートでの生徒の記述 2

⑤　課題 3 の全体追究

全体で 2 つの意見について議論する中で，生徒から，「面の中心同士を結んだ軸の場合は，上から見ると正方形の中心に軸がある形になっているから，90°，180°，270°，360°の 4 回対称になる．頂点同士を結んだ場合も上から見たらわかるのではないか．」という意見が挙がった（図 37）．小集団でこの意見について議論させると，頂点同士を結んだ場合も上から見ることで正六角形のように見え，角度は 120°，240°，360°の 3 回対称となることが確認できていた．（図 38）

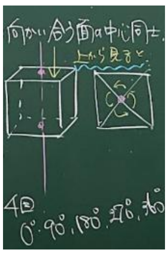


図 37　面の中心同士を結んだ場合

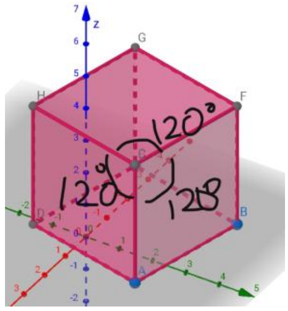


図 38　GeoGebra を使った生徒の記述

「立体を上から見る」という視点は．同様に辺の中点同士を結んだ軸の場合でも活用することができ，辺の中点同士では 180°，360°の 2 回対称になることが確認された．このとき，視点の使い方について，拡張による統合が起こっていたと考えられる（図 39）．

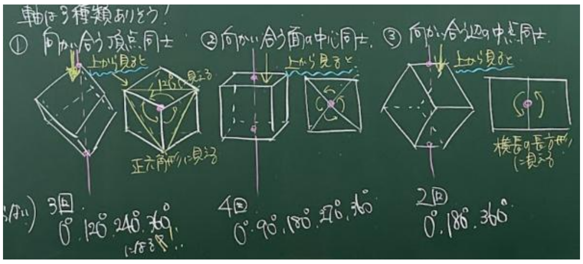


図 39　正六面体の 3 種類の回転対称性

この「立体を上から見る」という視点は，正確には，「回転軸が点に見えるように」という視点で，「立体を平面として（投影図における平面図として）」見ている．このことは，太田（2013）の「F_2/V」の場合にあたる．正六面体の面の中心同士を結んだ回転軸の場合と，図 39 の向かい合う辺の中点以外を回転軸とした場合について改めてこの視点で比較したところ，回転対称といえるかどうかを，生徒が明らかに判別できることが確認された（図 40）．次時に向け，この視点で他の正多面体の回転対称性について調べることを確認し，授業を終えた．

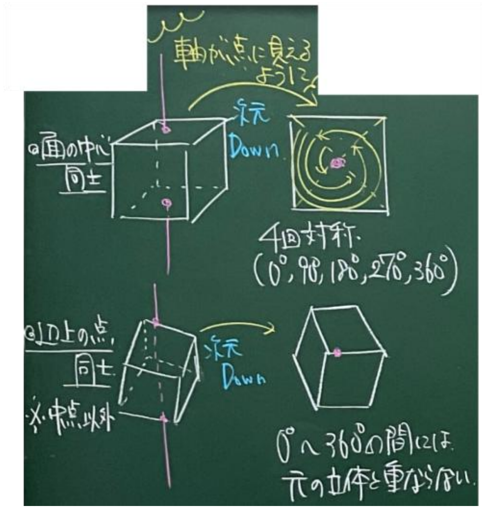


図 40　視点と対称について確認した板書

⑥　課題 3 の全体追究（第 7 時）

まず，前時に解決した正六面体以外の正多面体の回転対称性について調べ，全体で共有した．（図 41）

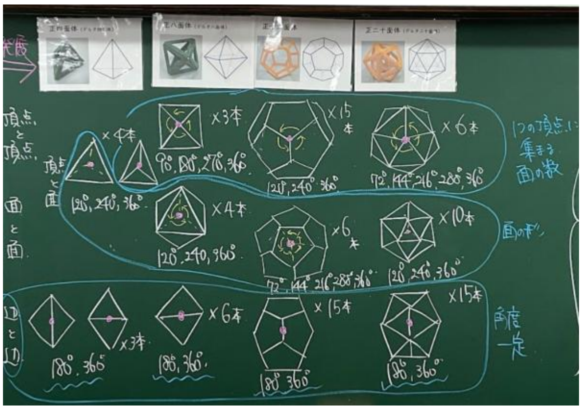


図 41　正多面体の回転対称性をまとめた板書

共通点を探す中で，全ての正多面体が辺の中点同士を通る回転軸が存在し，2 回対称であること，正四面体以外の 4 つの正多面体について，頂点同士，面の中心同士を結ぶ回転軸があることが生徒から挙げられた．頂点同士と面の中心同士の回転軸の対称回数については共通点を見出す生徒は最初いなかったが，小集団で再度議論することで，頂点同士の場合は，頂点に集まる面の数に，面の中心同士の場合は面の形によって対称回数が決まっていることに気づく姿が見られた．これらの共通点を見出す活動を通して，集合による統合が起こったと考えられる．また，正四面体のみで頂点と向かい合う面の中心を結んだ回転軸による回転対称がみられたが，これは頂点同士を結んだ回転軸のときに見られた「頂点に集まる面の数によって対称回数が決まる」と，面の中心同士を結んだ回転軸のときに見られた「面の形によって対称回数が決まる」ことの両方を満たしていることがわかった．このことは，拡張による統合が起こっていると考えられる．

続いて，正多面体との比較対象として，デルタ多面体の回転対称性について調べる活動を行い，全体追究でまとめていった（図 42）．

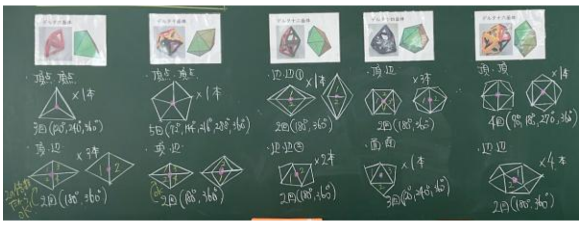


図 42　デルタ多面体の回転対称性をまとめた板書

頂点同士や辺の中点同士，面の中心同士といった，正多面体の場合と同様の軸の設定方法が見られた一方，頂点と辺の中点を結ぶ回転軸があったり，デルタ十二面体のように，辺の中点同士を結ぶ回転軸が 2 種類ある立体があったりすることに（図 17），生徒は驚いている様子だった．頂点と辺の中点を結んだ回転軸や，辺の中点同士を結んだ回転軸の場合，その全てが 2 回対称になっており，正多面体で確認された「辺の中点同士を結ぶ回転軸の場合，全てが 2 回対称である」ことが，実際は「辺の中点を回転軸が通っている場合，全てが 2 回対称である」ということがわかった．これは，補完による統合が起こったと考えられる．

また，それぞれの回転軸の数に注目している生徒もおり，正多面体でないデルタ多面体は，正多面体に対して明らかに軸の数が少ないことを挙げていた．これらのことが起こる要因として，生徒からは，「正多面体は頂点に集まる面の数が一定だから，頂点によって軸を通せたり通せなかったりすることはない」という意見が出て，「正多面体は，そうでないデルタ多面体と比較して，回転対称性が高い」と表現する生徒もいた．これは，正多面体の定義を念頭に置いた性質であると考えられる．同様のことが，頂点だけでなく，辺や面においてもいえ，正多面体の定義によって得られた性質といってよい．

正多面体の双対性と対称回数，対称軸の本数の関係については本時の中では生徒から意見として出ることはなかったが，第 11 時で鏡映対称性について調べる中で双対な正多面体の組み合わせと鏡映面（対称面）が重なることに気づく生徒がおり，全体では取り上げることはなかったが，別の生徒から「鏡映対称で面が重なるんだったら，回転対称でも軸が重なるのかな」といった統合的・発展的な学びにつながる発言もあった．

(3)　授業の考察

本実践では，正多面体の定義を学習し，正多面体ではないデルタ多面体と比較しながら対称性について調べる活動に取り組んだ．正多面体とデルタ多面体の全 10 種を区別せずに対称性について調べていく中で，正多面体の 5 種類のみがもつ性質や特徴を見出し，正多面体として定義するという展開も考えられる．また，回転対称や鏡映対称を通して，正多面体同士の双対な関係を見出す活動として位置付けることも可能であると感じた．これらは集合による統合によって得られるものであり，そういった点でも，本教材は統合的な考察を行いやすい教材であると言える．

正多面体は，定義である条件を緩和することで，半正多面体やねじれ正多面体などにも発展的に拡張することができる題材である．今回の実践後に，ある生徒から，「2 種類の正多角形をつかって正多面体に近い性質をもつ多面体はできるか」というテーマで，ポリドロンを使ってジョンソンの立体の一部の模型を作る姿も見られた（図 43）．

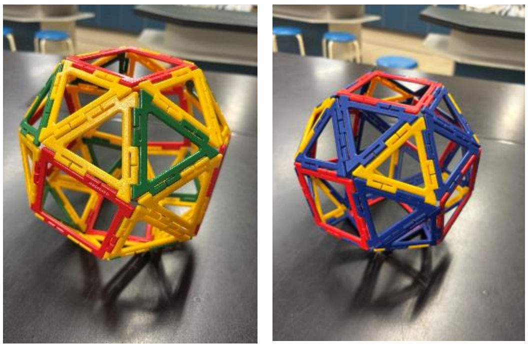


図 43　生徒が作成した立体模型

また，授業での小集団追究や全体追究において，回転対称での「この立体を軸が点に見える方向から平面として見ると」という視点と対称を明らかにした見方は，第 10 時，第 11 時での鏡映対称性を調べる活動の中で，「断面（対称面）が直線に見える方向から平面として見ると」という見方として活用されていた．投影図の学習においても，平面図と立面図が対称をどのような視点で見ているのかの理解に役立っていたと考えられる．ある場面で有効であった視点が，別の場面でも活用できるという，生徒が発展的に考察しやすい教材であると考えられる．

このように，様々な統合的・発展的に考察する場面を設定することができるとともに，二次元の性質を三次元に類推することや，空間図形の視点を明らかにする活動が設定できる教材であった．

よって本教材は，統合的・発展的な考察を促す上で，有効であったと考える．

6. 中 3「相似（中点連結定理の活用）」の実践

(1)　授業の概要

中 3 の単元「相似」において，4(2)で述べた「中点連結定理を活用して，内側にできる図形はどんな図形か」という教材を扱った実践を行った．

なお，授業の分析は，授業を撮影したビデオ映像，個人追究時に記述したワークシート（追究用紙），授業後の感想等をもとに行った．

①　単元計画

単元計画は表 4 の通りであり，本時は第 14 時である

表 4　「相似」の単元計画

時間	学習内容
1	【相似な図形について】 ・航空写真から，敷地面積を求め，相似の意味について理解する． ・相似な図形同士を比較し，相似な図形の特徴や性質を理解する．
2 3 4	【三角形の相似条件】集合　拡張 ・様々な方法で，相似な三角形を作図し，その作図が三角形のどの要素を利用しているか考え，分類分けを行い，相似条件を導き，説明する．
5	【四角形の相似条件】集合　拡張 ・相似な三角形から四角形の相似に発展させて四角形の相似条件について考察する．
6	【相似な三角形を作る①】拡張 ・三角形に補助線を1本引いて，相似な三角形を作る．さらに，なぜ相似になるかを説明する．
7	【相似な三角形を作る②】拡張 ・三角形に補助線を2本引いて，相似な三角形を作る．さらに，なぜ相似になるかを説明する．
8 9	【平行線と比の定理】集合 ・平行線と比の定理がどんな場合でも言えることを証明する．また，そのことを説明する．
10 11	【比と平行線の定理・中点連結定理】補完 ・三角形の 2 辺を等しい比に分ける線分について考え，比と平行線の定理を導く．また比と平行線の定理から，中点連結定理を導く．
12	【線分 AB の三等分線】拡張 ・線分 AB を三等分する作図方法について考える．また，その方法について正しいかどうか検証する．
13 14 (本時) 15	【中点を結んでできる図形】集合　拡張 ・図形の中点を結んでできる三角形や四角形が，どんな三角形や四角形になるかを考え，説明することができる． ・さらに条件を変えた場合についてどうなるか考え，説明することができる．
16	【三角形の角の二等分線と辺の比】拡張 ・三角形の角の二等分線と辺の比の性質について考え，説明する．
17 18	【面積比・表面積比・体積比】拡張 ・相似な図形の面積比・相似な立体の表面積比や体積比を求め，その性質について考える．
19	【四則演算の作図】補完 ・相似な図形の性質を利用して，a と b という長さから四則演算の結果を作図する方法を考える．
20	【近似値】集合　拡張 ・誤差や有効数字を，具体的な例を基に考え，その表し方を知る．
21	単元のまとめ

②　**本時の実施時期**：2025 年 11 月

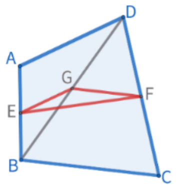
③　**対象生徒**：国立大学附属中学校 3 年生 36 名

④　**授業の目標**：図形の中点を結んでできる内側の三角形や四角形が，外側の図形とどんな関係になっているか，中点連結定理や三角形の相似を用いて考え，根拠をもって説明することができる．

(2)　**授業展開と生徒の反応**

①　**課題の提示（第 13 時）**

前時では，まず最初に原題として，次のような課題を提示し，問題や図の把握を行った．

> **【原題】<u>四角形 ABCD</u> で，<u>1 本の対角線 BD</u> の中点を G，辺 AB，CD の中点をそれぞれ E，F とすると<u>△EFG はどんな三角形になる</u>だろう？根拠を用いて説明しよう．**
>
> 
>

ここで，対角線の中点 G，辺 AB，辺 DC の中点を E，F とし，それらを結んだ△GEF を「四角形 ABCD の内側にできる△GEF」と合意形成を図った．

②　**△EFG が二等辺三角形になることの追究（第 13 時）**

課題提示後，生徒から，「見た目的に二等辺三角形」という意見が出た．そこで，「二等辺三角形ですか？」と問い返すと，違う生徒から「何の条件もないからわからない」という意見が出たことから「では，条件が加わった場合，どんな三角形になる可能性がありますか？」と聞いたところ，二等辺三角形，直角三角形，直角二等辺三角形，正三角形，という考えた出された．

そこで，「内側の△EFG がそれらの三角形になる時，どんな条件なのか？」ということを発問し，「二等辺三角形」になる時の条件を考えることを共通課題とし，同時に GeoGebra も共有し，個人追究を行った．

個人追究では，多くの生徒が AD=BC の時，△ABD，△BCD において中点連結定理が成り立ち，二等辺三角形になるという考えをもてていた．（図 44）．

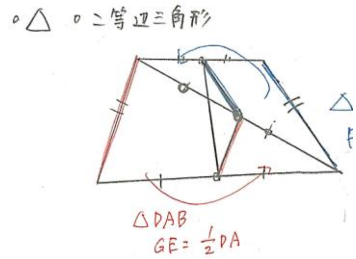


図 44　二等辺三角形の条件を表す生徒の記述

小集団追究では，中点連結定理がどこに成り立っているのかを確認していた．また，四角形 ABCD が「等脚台形のとき」と考え議論しているグループが幾つか見られた．直角三角形についての議論をしているグループも見られた．

全体追究の場面では，図 44 のように，根拠となる中点連結定理が成り立っていることを確認し，等脚台形だけではなく，AD=BC のときに△GEF は二等辺三角形になることが結論付けられた．図 45 の枠の中は，その関係がベン図で表されたものであり，図形同士の包摂関係を想起させる意味で意図的に扱った．

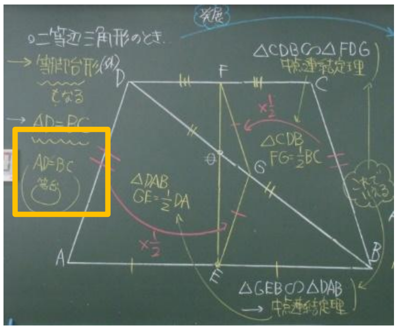


図 45　二等辺三角形になる時の条件の板書

③　**△EFG が直角三角形になることの追究（第 13 時）**

次に直角三角形について検討した．二等辺三角形の時と同じ△ABD，△BCD に着目して中点連結定理が成り立つことを全体で確認した．これは二等辺三角形の時と同じように説明できることから，集合による統合が起こったと考えられる．∠EGF が 90°になるためにはどうした良いかという議論の中で，DA を延長した線と CB を延長した線の交点を H として，GE を延長した線と CH の交点を I として，∠AHB=90°の時，同位角で∠EIB=90°となり，∠EGF=90°であるという意見が出てきた（図 46）．

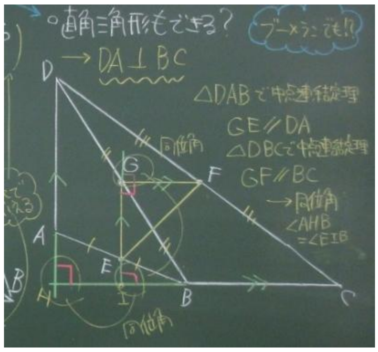


図 46　直角三角形になる時の条件の板書

∠AHB の角度に着目することで，∠EGF の角度もわかることを共有した．統合的な考察の中で生徒から∠AHB=90°を統合すると「AD⊥BC」と表せるという意見が出たため，全体で確認し，授業を終えた．

④　**△EFG が直角二等辺三角形になることの追究（第 14 時）**

本時は，前時の「二等辺三角形」と「直角三角形」になる時の条件を確認をした後「直角二等辺三角形」を考える流れとなった．以下はその時の会話である．

> T:直角二等辺三角形になる時は，どんな条件になるのかな？
> S:「二等辺三角形」と「直角三角形」の条件が同時に言えれば良い．
> T:なるほど，「二等辺三角形」と「直角三角形」と「直角二等辺三角形」はどんな関係なの？
> S:二等辺三角形（の集合）と直角三角形（の集

合）が重なっている部分が直角二等辺三角形だよ．だからAD=BCかつAD⊥BCであれば良い．

このやりとりから直角二等辺三角形は，すぐに全体で確認することができた（図 47）．

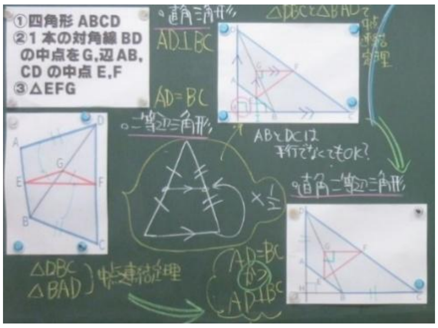


図 47　直角二等辺三角形の条件についての板書

包摂関係を想起し，条件を加えることで，二等辺三角形の時や直角三角形の時と同じように考えることを通して，この場面でも集合による統合が起こったと考えられる．

⑤　△EFG が正三角形になることの追究（第 14 時）

正三角形についても，二等辺三角形との包摂関係を確認した後，AD と BC がどんな角度で交われば良いかということを予想した．直角三角形の時は∠AHB=90°だったので，∠AHB=60°なのではないかという予想が出された後，個人追究を行った．

個人追究では，GeoGebra を動かし，正三角形になる時の「図」を考えている生徒が多くいた．二等辺三角形と正三角形の関係から，二等辺三角形の条件に加えて，「頂角が 60°」となるために，∠AHB を何度にしたら良いか見通しをもって考えている生徒もいた．その中で，四角形 ABCD が凹四角形になる場合について考えている生徒も見られた．小集団追究では，∠AHB=60°では正三角形ができないことから，∠AHB=120°の時ではないかという議論が見られた．議論の中で，「どこに中点連結定理が成り立っているのか」を確認しているグループも多くあった．

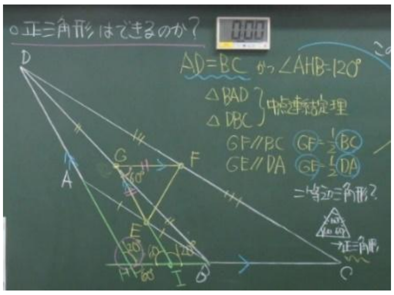


図 48　正三角形の条件について議論した板書

全体追究では，これまで議論してきた三角形と同様に，△ABD と△BCD において，中点連結定理が成り立っていることから，GE を延長した線と CH の交点を I として，GI∥DH がいえることが説明された．そして，∠AHB=120°であれば，GI∥DH の同位角により∠EIB=120°なることから，∠EGF=60°となることがいえた．そして，AD=BC かつ∠AHB=120°が条件であると共有し，正三角形の場合が説明された（図 48）．二等辺三角形の場合をもとにして，正三角形の場合を考えることで拡張による統合が起こったと考えられる．その後，生徒の中から外側の四角形 ABCD が「凹四角形」の時は，同じように説明できるのかという疑問が出てきたため，全体で共有した．凹四角形の場合，図が複雑になり，中点連結定理がどこで成り立っているのかわからないという意見が出た．一方で，四角形 ABCD が凹四角形になったとしても，これまでと同じように言えるという生徒もいたため，次時で検討することになった．

⑥　四角形 ABCD が凹四角形になった場合の追究（第 15 時）

凹四角形でも「これまでと同じように言えるのか」と，根拠を示す上で「どこに中点連結定理が成り立っているか」を確認する時間となった．（図 49）

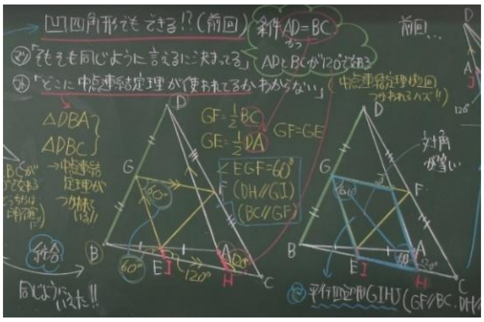


図 49　凹四角形の場合の議論をした板書

検討を重ねていく中で，∠EGF=60°をいうために，辺 FG と AD の交点を J としたとき，△ABD と△BCD で中点連結定理が成り立ち，GF∥BC，EG∥AD から，GJ∥BH，GI∥DH ということがいえ，四角形 GIHJ が「平行四辺形」であるという議論に発展した．そこで，今まで検討してきた図形もそうだったのではないか，という意見が出たため，凹んでいない四角形 ABCD においても，平行四辺形となる部分があるのかを振り返って確認した．そこで，平行四辺形と長方形の包摂関係について確認し，平行四辺形である四角形 GIHJ に，∠AHB=90°という条件が加わると長方形になることが確認され，△GEF が直角三角形の時に，∠AHB=90°なのかを改めて捉え直した（図 50）．

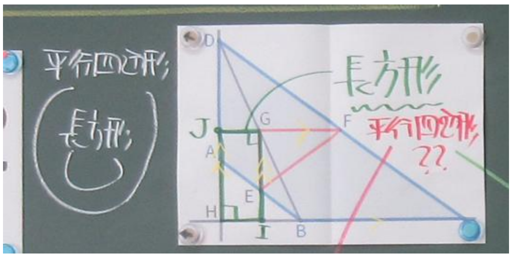


図 50　四角形 JHIG が長方形になることの確認

さらに，平行四辺形ということから，「∠EGF=180°－∠DHC」という一般化も行われた．こ

れまでの課題を振り返り，一般化することでどれも同じように∠EFG の大きさを式によって求められるということから，集合による統合が行ったと言える．

⑦　課題Ⅱの追究（第 15 時）

今まで考えてきた課題について，次にどんなことが考えられるかと生徒に聞いたところ，対角線の本数が 2 本になった時，ということが出てきたので，生徒との会話の中で以下のような課題を設定した．

> 【課題Ⅱ】四角形 ABCD で，2 本の対角線 AC，BD の中点をそれぞれ H，G，辺 AB，CD の中点をそれぞれ E，F とすると四角形 EHFG はどんな四角形になるだろう？根拠を用いて説明しよう．

対角線が増えたことにより，内側には四角形 EHFG ができることがわかる．生徒は，すぐに「平行四辺形」となるのではと予想した．△ABC，△BCD，△ABD，△ACD で中点連結定理により，BC // EH // GF，AD // EG // HF がいえ，2 組の対辺が平行になるので平行四辺形と説明した（図 51）．

図 51　四角形 EHFG が平行四辺形になる説明

生徒から「ひし形になる時は，二等辺三角形で考えた時と同様に，AD=BC である」という意見が出された．四角形の包摂関係が共有され，その後の長方形や正方形になる時について，条件の見通しを立てることができた．四角形の包摂関係をもとに，条件を変えて考えることで拡張による統合が起こったと言える．そこから四角形 GEHF が正方形になる時は，AD=BC かつ AD⊥BC の時であることが説明された（図 52）．

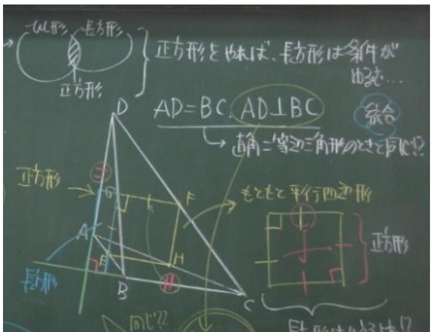


図 52　四角形の包摂関係を基に条件を検討した板書

（３）授業の考察

生徒の授業後の振り返りに次のようなものがあった．

> ・AD と BC が交わったところが直角になると直角三角形になることを説明できる．**２つを合わせれば**，直角二等辺三角形になる．もう 1 本の対角線の中点を結ぶと 2 組の三角形で中点連結定理を言えるから平行が言えて平行四辺形が言える．**同じように**，正方形と長方形が言える．

生徒の振り返りにもある通り，条件を合わせて特殊な場合を考えたり，三角形で検討したことを，四角形になった時「同じように考察して結論を得る」ことができたりする教材であった．また，内側にできる図形を変える中で，図形の包摂関係を想起させたことで，条件を一から考えるのではなく，条件の見通しが立ち，考察しやすくなったと言える．こうしたことから本教材が，統合的・発展的に考察する力を養う有効な教材であると言える．

7. 今後の課題

今後の課題として，次の 3 点を挙げる．

(1)　中学校の図形指導について，さらに「統合的・発展的な考察」を促す教材を開発して実践すること．発展しやすく，色々な種類の考えが出されるものを開発することでより統合に考える良さを感じることができると言える．

(2)　図形以外の領域でも「統合的・発展的な考察」を促す教材の開発・実践を行い，中学校 3 年間を通した指導の在り方を追究すること．

(3)　「統合」については，中島(1982/2015)を参考に，分類を進めていくこと．

(4)　これまでの実践をまとめ，統合・発展という視点から，中学校の図形カリキュラムを捉え直す．

＜引用・参考文献＞

藤原大樹(2021)．平面と空間を相互に関連付けて考察し表現する学習指導:クリスマスツリーの模型製作を通して．日本数学教育学会誌，103(3)，3-10. https://www.jstage.jst.go.jp/article/jjsme/103/3/103_3/_pdf/-char/ja

福田允(2009)．学校数学における発展的な考え方の指導に関する一考察:「式を読む」ことに着目して．日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集，181-186.

橋本吉貴(2001)．算数・数学科における「発展的な考え方」に関する考察．日本数学教育学会誌，83(9)，10-17．https://doi.org/10.32296/jjsme.83.9_10

一松信(1983)．正多面体を解く．73-77．東海大学出版会

池田敏和他(2025)．中学校数学 1，210,221-222．学校図書

池田敏和他(2025)．中学校数学 3，172,184．学校図書
稲熊紀昭・美澤将史・枌元新一郎(2024)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導:「図形の性質の調べ方」と「円」での教材開発と実践．静岡大学教育実践総合センター紀要，34，357-370．https://shizuoka.repo.nii.ac.jp/records/2000302
稲熊紀昭・美澤将史・枌元新一郎(2025)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導:「平面図形」と「円」での教材開発と実践．静岡大学教育実践総合センター紀要，35，332-348．https://shizuoka.repo.nii.ac.jp/records/2001357
伊藤由佳理(2009)．対称性の美:結晶群の分類．数学書房編集部編，この定理が美しい(pp.30-32)．数学書房
片桐重男(1988)．数学的な考え方の具体化．明治図書.
加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2018)．統合的・発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，28，97-106．https://doi.org/10.14945/00024664
加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2020)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，30，244-253．https://doi.org/10.14945/00027127
加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2021)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導：「多角形の直角の個数」と「ボロノイ図」の教材開発と実践．静岡大学教育実践総合センター紀要，31，315-324．https://doi.org/10.14945/00027931
川畑慈範(2011)．たのしいポリドロン:ずけいであそぼう．東京書籍
川上公一(2004)．立体をつくる：フレームワークスを使った授業．教育科学「数学教育」，559，63-70．明治図書
木戸哲也(2022)．正多面体の対称性について．数学教育研究第 51 号，107-132．大阪教育大学数学教育部門
菊池兵一(1997)．統合的，発展的に考察する．新しい算数研究，313，6-9．東洋館出版社
近藤裕，熊倉啓之，藤田太郎，宮脇真一，國宗進(2024)．中学生の平行四辺形概念の理解 同一問題による 3 回の調査の結果とその経年変化．日本数学教育学会誌，106(7)，2-10．https://doi.org/10.32296/jjsme.106.7_2
熊倉啓之(2011)．数学的な思考力・表現力を鍛える授業 24．明治図書.
美澤将史・稲熊紀昭・枌元新一郎(2023)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導:「平面図形」と「相似な図形」での教材開発と実践.静岡大学教育実践総合センター紀要，33，208-221．https://doi.org/10.14945/00029440
文部科学省(2018)．中学校学習指導要領解説数学編.日本文教出版
村田翔吾(2020)．数学的探究における定義活動の方法に関する研究：規範的側面に焦点を当てて．日本数学教育学会誌．101(114)．19-38．https://www.jstage.jst.go.jp/article/jjsme/101/R114/101_19/_pdf/-char/ja
中島健三(2015)．算数・数学教育と数学的な考え方とその進展のための考察(復刻版)，東洋館出版社．(原著出版 1982 年)
中村好則，佐藤寿仁，浅倉祥，稲垣道子，工藤真以(2023)．中学校数学科における ICT を活用した探究的な学習のための教材開発: 教科書の問題の発展的扱いに焦点を当てて．岩手大学教育実践研究論文集，10，70-77.
小野田啓子(2010)．空間思考の育成に向けて 3:正多面体の対称性と双対性，正射影の教材化の試みと実践報告．東京学芸大学附属竹早中学校紀要
太田伸也(2013)．空間図形を観る視点について．日本数学教育学会誌．95，33-40．https://www.jstage.jst.go.jp/article/jjsme/95/RS/95_33/_pdf/-char/ja
島田茂(2021)．数学教師のための問題集:教師のための問題集 改題．94-101,112-125．共立出版．(原著出版 1990 年)
杉山篤史，美澤将史，枌元新一郎，山田耕三(2022)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導:「図形の性質の調べ方」と「三平方の定理」．静岡大学教育実践総合センター紀要，32, 379-390．http://doi.org/10.14945/00028728
鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2016)．発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形の指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，25，43-52．https://doi.org/10.14945/00009430
鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2017)．統合的・発展的に考える活動を重視した中学校数学科における図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，26，45-54．https://doi.org/10.14945/00010138