

論文

中学校数学科における複比例を取り入れた単元開発と実践

—写真を撮ることに潜む数学を探る活動を通して—

西谷 聡一郎

松元 新一郎

静岡大学教育学部附属静岡中学校 静岡大学教育学部

Unit development and practice incorporating multiple proportions in junior high school mathematics

Activities to explore the mathematics hidden in taking photography

Nishitani Sohichiro, Matsumoto Shinichiro

Abstract

The purpose of this research is to develop teaching materials that incorporate multiple proportions, put them into practice, and examine them based on the following three research questions.

- 1) By grasping the relationship between the three variables in familiar phenomena for students as a compound proportionality, students will be able to deepen their thinking about multivariate phenomena.
- 2) By rethinking the relationship between proportional and inverse proportion as a single entity, students may be able to further deepen their understanding of proportional and inverse proportion.
- 3) Through the process of understanding quantitative relationships based on experimental values, students may be able to realize the importance of considering them proportionally or inversely proportionally.

In this practice, we developed and practiced teaching materials incorporating activities that explore the mathematics hidden in taking photographs that exist in our daily lives. From the students' activities and descriptions, we were able to clarify three research questions.

キーワード： 複比例 比例 反比例 多変数関数 みなす 写真 実験 データ

1. 研究の背景とリサーチクエスチョン

(1) 多変数関数・複比例について

平成 29 年告示中学校学習指導要領において、扱われている関数は、比例・反比例・1次関数・関数 $y=ax^2$ ・いろいろな関数であり、一変数を中心とするものである(文部科学省,2018a)。現代の複雑化した社会では、現実の問題を数学的に考慮する際、多変量の事象を数学化して考えることも少なくない。それにもかかわらず、中学校段階の数学の学習において、多変量の事象を数学化して考え学習する場は無いに等しいと言える。過去に遡ると、数學中學第一類では、1年と2年に比例の章が位置づけられ、「複比例」として学習していた(文部省,1943a,1943b)。その後、昭和33年告示学習指導要領(文部省,1958)では2年の数量関係の「用語と記号」の中に「積に比例」として位置づけられていた。昭和44年告示の学習指導要領(文部省,1969)では、1年の数式の領域の「(6)文字を用いることによって、関係や法則が一般的に、かつ簡潔に式に表わされることを理解させ、それらを式に表現する能力を伸ばす。」の内容の取り扱いに「2乗比例, 3乗に比例, 積に比例, 2乗に反比例などの比例関係および利率に関するものを式で表わすことも取り扱うものとする。」が示され、「積に比例」として位置づけられていた。次の昭和52年告示学習指導要領において「積

に比例」という用語は削除され、直近の平成29年告示中学校学習指導要領まで、中学校数学科に多変数関数または複比例の内容は記載されていない。しかし、銀林(1975)は「生徒は小学校第4学年からそれぞれの学年でもなまって変わる数量について学習してきているため、小学校の延長で何となく分かった気であることが多い」と述べ、「ともなまって変わる3つの量について考えさせることを通して、比例, 反比例をもう一度見直させるとともに、新しい量をつくるということはどういうことかを考えさせる」ことの重要性を主張している。また、松元(2007)は、理科の学習で電力と電圧・電流の関係や熱量と電力の関係等で多変数関数が扱われており、算数・数学科でも3変数以上の関数を扱う必要性を述べている。

先行実践として、運送料金の決定について、運送料金・運送距離・荷物の重さの関係を複比例として扱った実践(松井,1968・小寺,1991)、環境問題としてペットボトルの使用量・ごみ率・ごみの量の関係を複比例として行った実践(小寺,2005)、教科書で反比例の活用として位置づいているランドルト環を用いて、視力・環の大きさ・距離の関係を複比例として行った実践(齋藤,2016)、自転車におけるペダルの回転数、後輪の回転数、後輪の歯車の歯数を複比例として行った実践(日向,2022)が挙げられる。しかし、中学校における多変

数関数，中でも複比例における授業実践は数少なく，現在に至るまでに十分な研究がされてきたとは言いがたい。

以上のことから，複比例を扱った教材を開発し，それを実践することを通して，次の2つのリサーチクエストを設定した。

- ① 身近な事象を複比例として3つの変数の関係ととらえることで，生徒は多変量の事象について考えを深めることができるようになるのではないか。
- ② 比例や反比例を別物としてとらえるのではなく，一体のものとして関係をとらえ直すことで，生徒は比例や反比例に関する理解をより一層深めることができるのではないか。

(2) 第1学年でみなす活動を取り入れる価値

藤原(2012)は，中学生による数学的なモデリングを育成することを目指して，継続的な指導をしていく重要性を述べている。また，池田(1999)は，調査問題の分析を通して，生徒自らがモデリングを促進する考え方は，中・高等学校での純粋数学の指導によっては自動的に育成されるものではないことの示唆を得ている。これらのことから，現実の事象と数学の事象を行き来するためのモデリングの考え方を育成するためにも，関数領域においては近似的な考え方を要する「みなす」という考え方について，第1学年から触れていくことが重要であると考えた。しかし，現行の教科書（令和2年検定の7社）の関数領域において「みなす」という活動は，第1学年で2社，第2学年で7社，第3学年で4社にあり，第1学年から「みなす」という活動に関わる教材開発が求められる。

また，数学の教科書の関数領域の活用場面では，考えやすくするために値が整えられていることが多く，理科の実験のように値が定まらない場面に出会う機会が多くはない。そのため，第2・3学年においてもみなすこと自体に難しさを感じておらず，みなすことによさについて実感している生徒は少ないのではないかと考えられる。現実の世界では目的とする2つの数量関係を調べたとき，それらの関係は値にばらつきが多く，完全な比例や反比例のような関数関係になっていないことが多いため，それらの数量関係を関数として判断し，関係を把握するということが難しくなってしまう。「○○として考える」のようにみなすことによってその先の議論を進められることにみなすことによさがある。よって，数学の授業内で第1学年から継続的にみなすことについて指導していくことで，みなすことによさを実感させることができるのではないかと考えた。

そこで，本研究の授業実践では実験を行い，生徒自らが，実験値を集め，その生データを元にいくつかの数量関係を探っていくことにする。その過程で，実験

による誤差を生徒の多様な視点から判断し，比例や反比例とみなしていくことで，次の3点目のリサーチクエストを設定した。

- ③ 実験値をもとにして数量関係をとらえていく過程を通して，生徒はみなすこと自体の重要性について気づくことができるのではないか。

2. 研究の目的

本研究の目的は，複比例を取り入れた教材を開発し，授業実践を行い，次の3つのリサーチクエストの考察をすることで本研究の有効性を検証していくことである。

- ① 身近な事象の3つの変数の関係を複比例ととらえることで，生徒は多変量の事象について考えを深めることができるようになるのではないか
- ② 比例や反比例を別物としてとらえるのではなく，一体のものとして関係をとらえ直すことで，生徒は比例や反比例に関する理解をより一層深めることができるのではないか
- ③ 実験値をもとにして数量関係をとらえていく過程を通して，生徒はみなすこと自体の重要性について気づくことができるのではないか

3. 研究の方法

前述したリサーチクエスト①～③について検証していくために，複比例を取り入れた教材を開発し，実践することを通してそこであらわれた生徒の学びの実態から本研究が有効であったかを考察する。

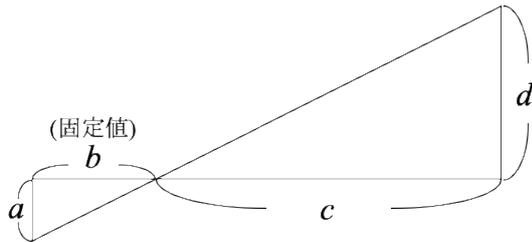
4. 複比例を取り入れた教材について

(1) 「写真を撮る」行為を数学的にとらえる

写真を撮るときにどのようなことを考えながら撮っているだろうか。「インスタ映え」という言葉があるように，より見映えのよい写真となるために，配置や構図などを考えて撮ることもある。スマートフォンなどで手軽に撮ることができる写真は，我々の生活の中でとても身近なものである。

本実践では，そのような日々の生活の中に存在する「写真を撮る」という行為を数学的な見方ととらえる。ある被写体をカメラで撮るとき，複数の数量関係が存在する。被写体の大きさとカメラから被写体までの距離，被写体の大きさと写真に写る被写体の大きさ，写真に写る被写体の大きさとカメラから被写体までの距離などである。これらは感覚的にわかっているものの，実際どのような関係があるかを理解した上で写真を撮っているという人は多くない。

では，どのような数量関係が潜んでいるのだろうか。写真を撮るときに潜む数量関係を簡易的に図1のように表す。



- a 写真（画面上）に写る被写体の大きさ
- b 単焦点レンズの焦点距離（固定値）
- c カメラから被写体までの距離
- d 被写体の大きさ

図1 写真を撮ることに潜む数量関係の模式図

①写真（画面上）に写る被写体の大きさを定数とする

図1の2つの三角形は縮図・拡大図の関係（相似な図形）であるから、対応する辺の比はすべて等しい。したがって、図1のaを定数とすると、cとdの数量関係が見えてくる。

$$\begin{aligned} \text{このとき, } a:b &= d:c \\ bd &= ac \\ d &= \frac{a}{b}c \quad \left(\frac{a}{b} \text{は定数}\right) \end{aligned}$$

つまり、カメラから被写体までの距離と被写体の大きさには比例の関係があるということを見いだすことができる。

②カメラから被写体までの距離を定数とする

次に、図1のcを定数とすると、aとdの数量関係が見えてくる。

$$\begin{aligned} \text{このとき, } a:b &= d:c \\ ac &= bd \\ a &= \frac{b}{c}d \quad \left(\frac{b}{c} \text{は定数}\right) \end{aligned}$$

つまり、被写体の大きさと写真に写る大きさには比例の関係があるということを見いだすことができる。

③被写体の大きさを定数とする

最後に、図1のdを定数とすると、aとcの数量関係が見えてくる。

$$\begin{aligned} \text{このとき, } a:b &= d:c \\ ac &= bd \\ a &= \frac{bd}{c} \quad (bd \text{は定数}) \end{aligned}$$

つまり、カメラから被写体までの距離と写真に写る大きさには反比例の関係があるということを見いだすことができる。

以上から3つの数量はともなって変わる複比例の関

係であることがわかる。

④実験データで考える価値

①～③のようにして、生徒たちは数量関係をとらえていく。小学校段階で扱われている、ともなって変わる数量は比例や反比例としてとらえやすいものも多く、その変化や対応のようすは表や言葉で表した式などでまとめることが容易であった。しかし、中学校段階では、数値に規則性が見えにくい実験などによってデータを集めることもあり、ともなって変わる数量の変化と対応がとらえにくくなる場合もある。そこで、数値間の幅があったり、ばらつきがあったりする実験値を、表・式・グラフを互いに関連づけながらわかりやすくまとめることで、ともなって変わる数量を比例・反比例とみなして考えることができるようになる。みなして考えることで、ともなって変わる数量に関係性を見だし、データの考察などができるようになる。また、データを客観的に表現できる幅が広がったことで、より多くの根拠をもとに「みなす」ということについて考えることができるようになったとも言えるだろう。

写真を撮ることに潜む数量関係を感覚的にわかっているからこそ、実験を通してデータを集め、得られた数値の関係を比例や反比例にみなすことによって、感覚的であったものが数学的にとらえられるようになり、①～③の関係も明らかになっていくだろう。つまり、みなすことでものの見方がより豊かになると言える。

(2) 写真を教材として扱う可能性

(1) ①～③のa～dの数量関係を見たとき、写真を撮るという行為は変わらないものの、何を変数とし、何を定数とするのかによって比例・反比例の関係が変わってくるということが複比例教材の魅力である。これまでの比例・反比例の教材には、変数として考えるものを指定されているものが多く、自分で変数・定数を選びながら変化と対応を考えていくものは少ない。しかし、写真を撮るときにかかわる数値の中で、一つの数値を定数としたとき、残りの数量にはどのような関係があるのかということについて、実験で集めたデータをもとに、表・式・グラフを関連づけて考えることで、変数や定数とするものによって比例にも反比例にもなり得ることがあると気づくことができる。このような活動によって、比例と反比例の関係を一体として考えられるようになり、変化と対応を幅広く考えるようになる。その際、比例と反比例の意味や考え方をもう一度とらえ直したり、そもそも関数とは何かについても振り返ったりする姿が見られると考えた。

また、反比例の利用の場面では、歯車に関するもの、電子レンジに関するもの、ランドルト環に関するものなどがよく扱われる内容であるが、身近な事象の中で

反比例としてとらえて考えるものが少ないため、教材化が難しくイメージがもちにくい。そこで、写真を撮るという身近な事象から比例や反比例をとらえることで、新たな教材としての可能性も探っていくことができると考えた。

5. 単元計画・授業実践

(1) 単元の目標と単元計画

① 単元の目標

遠近法を利用した不思議な写真に潜む、ともなって変わる様々な数量を実験で得たデータをもとに、表・式・グラフを相互に関連づけながら数量関係を整理する活動を通して、比例・反比例とみなすことで変化や対応をとらえたり、何を定数とするかによって数量関係が比例にも反比例にもなったりすることに気づき、比例や反比例の関係をとらえ直すことができる。

② 単元計画 (13 時間扱い)

対象である生徒たちは中学校で比例・反比例は未習であり、小学校段階の知識等を踏まえて、表1のように単元計画を立てた。

表1 本研究の単元計画

時	学習内容
1	不思議な写真に潜む数学について考えよう
2~4	カメラから被写体までの距離と被写体の大きさの関係を探ろう
5~9	写真を撮ることに隠された他の数量関係を分析しよう
10	みなすことのよさってなんだろう
11~13	実際に自分たちで写真を撮ってみよう

(2) 授業展開と生徒の反応

対象生徒は国立大学附属中学校1年生であり、令和4(2022)年10~11月に実施した。

第1時 不思議な写真に潜む数学について考えよう

まず、生徒たちに授業者が遠近法を利用した図2のような写真を何枚か提示した。



図2 生徒たちに提示した写真の一例

授業者が撮影した図2は、校内で撮ったということ

や、自分たちが知っている先生が写っていることから生徒たちは、「この写真はどうなっているのだろう?」とより興味を示した。

そこで、授業者は「どのような関係がわかれば同じような写真が撮れるだろう」と問いかけ、不思議な写真を撮るための関係を生徒たちは探り始めた。意見の共有をする中で、「写っているものの大きさとカメラからの距離がわかれば撮れるのではないだろうか」

「カメラの写る範囲と写るものの大きさがわかれば撮れそう」「写るものの大きさと比がわかればいいだろう」などという発言があった。特に、大きさと比に注目した生徒たちは縮図・拡大図(相似な図形)のとらえ方をして考える姿も見られた(図3)。生徒たちは自然と遠近法を利用した写真であることを共通理解し、手前の被写体は小さいもの、奥の被写体は大きいものとして、その2つが同じ大きさに写真に写るためにはどうしたらいいのかを考えていた。

そこで授業の終末は、「様々な大きさの被写体が画面上で同じ大きさに写るためにはどれくらいカメラから離れたらいいのだろうか」と問いかけ、画面上の被写体の大きさを固定したときの被写体の大きさとカメラからの距離の関係に注目させ、次時へとつなげた。

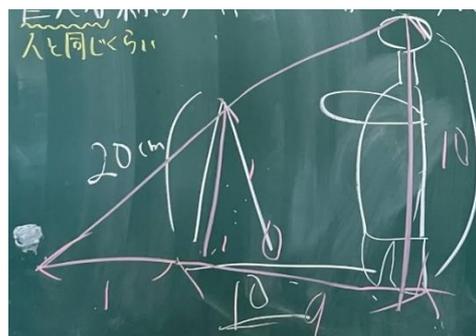


図3 縮図・拡大図(相似な図形)をとらえた生徒の板書

第2~4時 カメラから被写体までの距離と被写体の大きさの関係を探ろう

① 第2時

まず、画面上の被写体の大きさを5cm固定したときの被写体の大きさとカメラからの距離の関係を探るために、どのような実験を行ったらいいのかを全体で考えた。実験による細かな部分(カメラの置く位置やどこから測り始めるかなど)を揃えるためである。また、5cmという固定する値は、授業者から提案した。実験をする上である程度の大きさの被写体でもiPadの画面上に収まるようにしたかったためである。実験方法はこちらから示さず、生徒たちで実験方法を考え、その方法で班ごと実験を行った。ただし、タブレット型端末にあるカメラを使用するため、写真を撮るときのタブレット型端末の向きだけはこちらから指定した。以下は実験を終えた生徒たちが書いた追

究の記録である。

- ・カメラからの距離と被写体の大きさは比例しているような気がする。まだ細かく計算していないからわからないけど、次回法則を見つけられたらいいなって思っています。
- ・だいたい(カメラからの距離が)2m くらいで画面上の大きさが被写体の大きさの10分の1になった。
- ・自分たちが調べた結果をもとにすると、(被写体の大きさ) \times 約 4=(カメラからの距離)になることがわかった。画面上で 5cm じゃなかったらどうなるのかも調べてみたいです。
- ・身長が低いほど、カメラからの距離が縮まることがわかった。(カメラからの距離) \times 約 0.27=(身長)になった。比例の関係なのかなと思ったけど、誤差もあるだろうからはっきりしないこともありそうです。

これらの記録から、自分たちの実験結果をもとにして「比例の関係がありそうだ」ということを生徒たちは見出している。比例の関係までは見出せていなくても、日常の経験から被写体が大きくなるほどカメラからの距離も伸びていくことがわかっている。しかし、自分たちのデータに細かなズレが生じている点や、生徒たちが作った関係式が統一されていない点がかがえた。このことから、次時の実験データの共有、分析の時間ではこの辺りが生徒たちの議論になりそうだという見立てを立てることができた。

② 第3・4時

各班から集まった実験のデータをもとに、生徒たちは画面上の大きさを5cmと固定したときの被写体の大きさと画面上の大きさの関係を探り始めた。表をもとに被写体の大きさと画面上の大きさの比を求める生徒やグラフ用紙に集めたデータをまとめる生徒の姿が見られた。個々の追究を全体で共有するときには、まず、表から被写体の大きさとカメラから被写体までの距離との関係について議論が進んだ。多くのデータが「被写体の大きさ:カメラから被写体までの距離=1:4」の関係になっているのに対し、いくつかのデータは1:3.6のように1:4にはなっていないためである。生徒たちは「大した誤差ではないから問題ない」「実験による誤差だから仕方ない」「四捨五入をしたら4になる」「1:4にならないと同じ関係だとは言にくい」などと考えていた。また、その議論の中では事前に想定していたように平均を取る考え方が表れ、自分たちのデータの平均が1:4.2...となることを導き、そこから1:4の関係とする考えも出てきた。この時点で生徒たちは「被写体の大きさとカメラから被写体までの距離は比例の関係だ」ととらえていたため、グラフを使って考えていた生徒のグラフ用紙(図4)をもとに、データを視覚的に全体で確かめた。

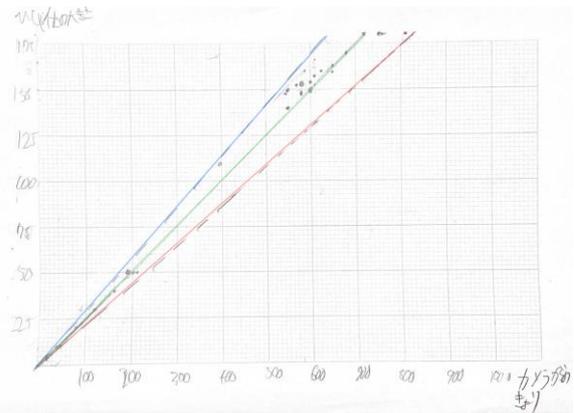


図4 カメラから被写体までの距離と被写体の大きさの関係を表すグラフ

すると、先程まで1:4の関係だととらえていた生徒たちは思っていたよりも実験のデータにずれがあることに気づき、迷い始めた。また、他のグラフで考えていた別の生徒が自分のかいたものと縦軸と横軸が違うことに気づき、どちらをx軸とし、どちらをy軸とするかについても議論となった。前者については、一番データが集まっている部分を目安に直線を引く考え方が良さそうだという結論になった。後者については授業者が教科書を用いてyがxの関数とは何かを説明した。その結果、実験において先に決めたもの(今回の実験の場合被写体の大きさ)をxとし、それによって決まるyをカメラからの距離として考えた。

授業の終末において、改めて被写体の大きさとカメラからの距離の関係について問い直すと、「比例ではないが比例っぽい関係」「約比例」「関係が無いとは言いがたいけど比例のような関係」という生徒たちなりのみなし方で関係をとらえていた。事前の計画では、ここでみなすという考え方について考えを深める予定でいた。しかし、ここで一度みなすという考え方を生徒たちの共通認識としてしまうと、今後の実験結果においても「〇〇とみなせばいいだろう」と、細かなデータに注目することがなくなってしまったり、どのくらいの誤差だったらみなしてもよいのかを考えなくなってしまったりすると判断したため、この場面からみなすことへの考えを深めることを避け、今後の複数の実験においてそれぞれの関係を生徒たちが比例や反比例ととらえていく過程で、みなすことの意味や価値に気づかせることとした。ここでは生徒たちが行ったことを「比例とみなす」とは伝えずに授業を終えた。以下は第3・4時を終えたときに生徒たちが書いた追究の記録である。

- ・「約比例」は「比例」ではないので、比例と言っているのだろうか。
- ・1:4の結果になったが、グラフにするとデータが結構ずれているところがあって、誤差ってことにしているのか?と思った。

- ・僕は比の平均が 1:4.2 だったから、約 1:4 だと思う。一番多かったデータも 1:4 だったからだ。
- ・約比例ととらえていいと思う。正確には比例ではないし、約を使ったほうがデータが正確ではない誤差の生じているものもあるから。こういうときに「約」が使えると思った。

また、本来の目的である写真を撮ることにつなげ、数学的にとらえたものを日常の世界でとらえて考えるような次の追究の記録も見られた。

- ・iPad で 5cm にするには被写体とカメラからの距離を 1:4 にすればいいということがわかりました。詳しく計算すると若干違うかもしれないけど、今度実際に撮るときにいちいち「ちょっと前!」「もう少し後ろ!」と何もわからないままやるより断然楽になったのでいい写真を撮れるようにしたいです。

第5～9時 写真を撮ることに隠された他の数量関係を分析しよう

① 第5時

第1～4時では、生徒たちは写真に潜む数量関係の中でも画面上の被写体の大きさを 5cm と固定したときの被写体の大きさとカメラからの距離の関係を探った。ここで、授業者は生徒たちに最初に見せた不思議な写真に立ち返らせ、「他にどのような関係がわかればあの写真が撮れるだろうか」と問いかけた。すると、前回行った実験で関わった3つの変数(画面上の大きさ・被写体の大きさ・カメラからの距離)について、別の変数を固定したときのそれぞれの関係について調べてみたいという意見が多かったため、自然と予定していた次の活動に移ることができた。反比例とみなす活動になることが予想される画面上の被写体の大きさとカメラから被写体までの距離の関係を意図的に後半にしたが、生徒から「カメラからの距離を固定したときの被写体の大きさと画面上の大きさがわかればいいだろう」「被写体の大きさを固定したときの画面上の大きさとカメラからの距離がわかればいいんじゃないか」と出てきたため、これらの実験を行うことで不思議な写真を撮るために必要な関係を探ることにした。なお、固定する大きさや長さについては、生徒たちと話し合う中でカメラから被写体までの距離を固定する場合は 3m、被写体の大きさを固定する場合は 150cm に決めた。なお、カメラから被写体までの距離を 3m と固定する場合の被写体の大きさと画面上の大きさの関係を調べる実験を実験II、被写体の大きさを 150cm と固定する場合の画面上の大きさとカメラから被写体までの距離の関係を調べる実験を実験IIIとして実験を行った。

② 第6・7時

第5時で実験を終え、データを集めることができた

ため、第6時では、まず実験IIの分析から始めた。最初に行った実験(以下実験Iとする)に比べ、数値のキリがよくないこともあり、個別活動では生徒たちは関係を調べる際の式化が難しく、関係を表すことに困っていた。そのため、全体で共有する初めの段階では、実験IIの関係を比例または約比例とした生徒と、関係を見いだせていない生徒に分かれていた。しかし、1つ1つのデータの対応を見ていくと今回も画面上の大きさと被写体の大きさの比が約 1:16 の関係になっていることや、グラフにしたときにほぼ直線になることが発表され、関係を見いだせていなかった生徒も比例または約比例なのではないかというところまで考えをもつことができた。また、前回議論となったどちらが x でどちらが y なのかという点については生徒たちがこれまでの学びを活かし、実験IIの方法を思い返して被写体の大きさを x 、画面上の大きさを y とすることで共通理解をした。実験による誤差についても実験Iのときのことを踏まえ、計測の誤差とする生徒や多少は仕方のないものであると誤差があることを前提とする生徒もいた。加えて、共有時には最初から「(画面上の大きさ) = (被写体の大きさ) $\times x$ として考えると…」のように、実験IIの関係を既に比例として考えている生徒も多く見られた。そのため、授業者は「何を根拠にそう考えたの?」と問い返した。表やグラフ(図5)については考えが多く出てきた。一方、式については「 x にはいくつが当てはまるのだろう」と実験Iでは平均などを取って考えていた生徒たちが、今回は平均を取らずに考え、悩み始めた。グラフにしたときに被写体 60cm まではきれいな比例の関係を見出し、対応を考えられていたのだが、70cm 以降は少しずれ始め、60cm までの対応と少し異なっていたため、比例定数が求めづらいことや、実験による誤差に執着し、きれいな対応関係を見出そうとしすぎていたことが原因ではないかと考えられた。

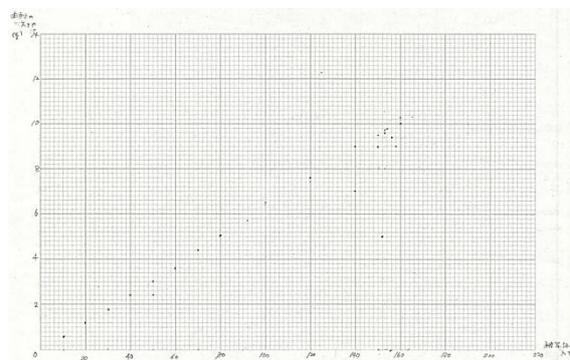


図5 被写体の大きさと画面上の被写体の大きさの関係を表すグラフ

最終的に生徒たちは平均を取る考え方に立ち返り、(画面上の大きさ) = 約 0.06 \times (被写体の大きさ) という

式を作り、約比例の関係ではないかと考えた。しかし、何をもって「約」としているのかという誤差の部分に生徒たちは注目し始めた。「約比例とは何が『約』なのかよくわからない」「大体比例しているから約比例なんだよ」「今回も比例っぽい関係だから比例とは言い切れないから約比例」というような反応が見られた。実験Iの関係ははっきりわからなかったものの、関連がないとは言い切れなかったため、他の実験を踏まえて約比例としていた。今回の実験IIも「前回と同様に次の実験(実験III)の結果を踏まえることで比例の関係になるのか、約比例というような大体的な関係なのかが見いだせそうだ」という結論になり、次時に移ることとなった。以下は第6・7時を終えたときの生徒たちが書いた追究の記録である。

- ・今の考えとしては、画面上で1cmは本来約16cmで、被写体の1cmは0.062cmということだけわかっている。
- ・今回も約比例でいいと思う。理由はグラフをかいたとき、比例のグラフとなったため。ただし、誤差がある。だから約比例。
- ・自分的には今回も約比例だと思った。なぜ比例かという、長さ60cmまでは2倍、3倍…と増えていったが、70cmからは7倍にはならなかった。比例であったら4.2cmなのに4.4cmとなった。この0.2cmは誤差の範囲内なのか？

③ 第8・9時

実験I、実験IIを踏まえ、実験IIIの分析に移った。これまで大体比例の関係が見いだせていたということもあり、生徒たちは「今回も比例の関係になるのではないか」と予想し、(画面上の大きさ)÷(被写体の大きさ)が定数になると考えていたり、データの散らばりが多いように見えることから今回は関連性がないと考えていたりした。しかし、分析を続けていると、何となく積は近い数字になりそうだということやグラフ

(図6)にして表すと反比例のような関係がありそうだとことを見出した。全体で意見を共有する場面で、授業者は、「実験I、実験IIから実験IIIの関係も比例ではないか」と考えていた生徒の様子を始めに共有した。その後、反比例ととらえて考えていた生徒の発言を繋ぎながら授業を進めた。第9時では、比例定数をいくつとするか、関係を反比例としたとき、根拠を何とするかについて議論し、実験IIIの関係を、(カメラからの距離) = $2800 \div$ (画面上の大きさ) とした。

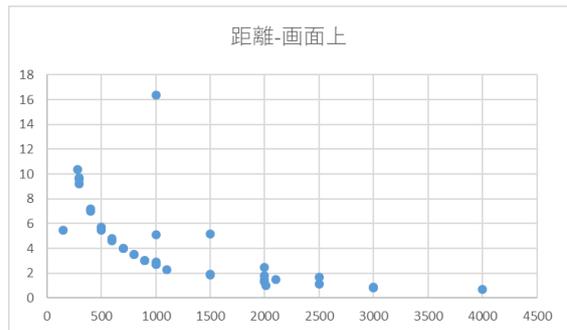


図6 カメラから被写体までの距離と画面上の大きさの関係を表すグラフ(生徒のワークシートをもとに授業者が作成)

第10時 みなすことのよさってなんだろう

授業者はこれまで生徒たちが考えてきた「約」という考え方や、大体としてとらえたり、仮定したりする考え方を数学的に「みなす」ということを伝えた。授業者は生徒たちに「みなす」ということについて考えを深めてもらいたいと考えていたため、「みなすことについて」を生徒たちに問いかけた。視点は「みなすことのよさとは何か」「どうやったらみなすことができるのか(みなす上でのポイントやコツ、やり方)」の2つである。以下はその時の生徒たちが書いた追究の記録である。

- ・みなすことで仮説を作ることができる。「こう仮定しよう」から議論が始まるのだと思った。
- ・みなすことは数学に限らず現実でもとても重要だと思った。みなさないが始まらないというか、みなすことで今まで分からなかったことや発見されていなかったことが見えてくるのではないかと考えた。
- ・みなしているときは1つ進んだ段階からスタートできる。これは「こういう関係であるとみなそう！」と大きな1つの柱ができるということ。みなしていないときにはこれがない状態。つまり、議論が0→1のものが1→2になることだと思った。それによって意見はまとまりやすと思うし、1の状態から根拠などを探っていくことができると思った。

みなすことのよさを、本単元を通して生徒たちは感じ取っていたことがうかがえる。また、みなすことについては、数の世界と現実の世界を往還したり、対比したりしながら「みなす」ということについて考えを深めていた。

第11~13時 実際に自分たちで写真を撮ってみよう

① 第11・12時

実験を通して、カメラからの距離・被写体の大き

さ・画面上の大きさの3つの関係をとらえてきた生徒たちは、第1時に授業者が示した写真を自分たちも撮ることができるのではないかと思いを抱き、自分たちで不思議な写真を撮ることに意欲をもちはじめたため、学級で代表の生徒を選び、「身長140cm, 150cm, 160cmの3人を画面上で9cmとするにはカメラからの距離をどれだけ離ればいいのかの大きさ」について考え進めた。なお、9cmとしたのは、授業者がはじめに示した写真の画面上の大きさが9cmだからである。はじめは実験I～実験IIIの関係をみなした式に直接代入しようとする姿が見られた。しかし、授業者が撮った被写体の大きさは生徒たちが撮ろうとしている被写体の大きさと必ずしも同じとは言えない。そのため、3つの関係を生かしながら、画面上の被写体の大きさを設定し、カメラとの距離を導いていかなければならない。その際、これまでにみなしてきた実験I～実験IIIの結果をもとに、それらを求めていくことになる。はじめ代入していた生徒たちは次第にこの代入した値では画面上で9cmに映らないことに気づいた。このとき、実験Iで導いた式に代入している生徒がほとんどだった。以下は生徒たちの授業時の様子である。

S1: 式に代入して求めた距離はその被写体が画面上で5cmに映るときの距離でしょ。

S2: これは実験I～IIIにおいて、あるものを固定したときにおける関係の式だからいつでも成り立つわけではないよ。

S3: 実験結果から導いた式はそれぞれ5cm, 3m, 150cmに固定したときのものだよ。

S4: じゃあ式に代入した値はどう生かせるのかな？

S5: 画面上の大きさを5cmから9cmにしているから、カメラからの距離も同じように5分の9倍して求めたらいいんじゃないかな？

S6: え、それは違うよ。そうすると、画面上で同じ被写体を大きく映すんだからカメラからの距離は近づかなくてはいけませんよ。それでは距離が遠くなってしまふからおかしいんじゃないの？

S7: え、じゃあカメラからの距離は小さくしなくてはならないことはわかったけど、どれくらい小さくすればいいの？

上記の発話の通り、生徒たちから新たな疑問が生まれた。ここで3つの関係についてそれぞれの実験からとらえられた生徒は、「実験IIIの結果から、被写体の大きさを固定したとき、画面上の大きさとカメラからの距離が反比例の関係になっているのだから、画面上を5cmから9cmに5分の9倍したら、距離は9分の5倍しなくてはならない」ということに気づいた。画面上の大きさとカメラからの距離が反比例の関係になっていると実験IIIの結果から改めて確認した生徒たち

は、それぞれの身長に対するカメラからの距離を計算によって求めることができた。

②第13時

第11・12時で身長140・150・160cmの大きさに対するカメラからの距離を求めることができた生徒たちは、実際に写真を撮り、授業者が示した写真と同様な写真が撮れたことに喜びを感じていた。しかし、多少のズレがあったことに気づいた生徒たちは、その原因について考えた。「実験の測定方法を統一しなかったのが原因なのではないか」と実験方法に注目して考えたり、「みなしたときの比例定数の値がよくなかったのではないかと、自分たちのみなし方について原因があるのではないかと考えたりする様子が見られた。授業者は「実験結果をどのようにみなせばよかったのだろう」と問い返すと、「小数点の切り捨てをもう少し考えて行えばよかった」や「外れ値について、もう少し基準を明確にしたほうがよかった」という意見が出た。自分たちの結果を踏まえて写真を撮ったことで、みなしたことについての振り返りを行うことができた。以下はその時の生徒たちが書いた追究の記録である。

- ・被写体の大きさに合わせた式で写真を撮ってみて、多少のズレはあったけど、いい感じに写真が撮れた。撮った写真を見ると、式は正しかったと言えるのではないかと。
- ・写真のズレはみなすことにあるのかと思いました。みなすことで具体的な数を入れて関係を探ることはできたけど、正確に合わせようとするとき合いませんでした。みなすの弱点なのかな？
- ・今回は実験Iの結果だけでは完結しませんでした。実験IIIで被写体を決めた時の知識（反比例）を生かして、画面上が変わったら、距離は反比例になるという2ステップを踏まなければならなかったです。
- ・多少のズレの原因は比例定数の誤差にあるのではないかと考えています。私たちが計算するために使った式の比例定数4は、4.2や3.9かもしれないけど、4として表したので、ここに距離や画面上の大きさに関係してきてしまい、ズレが出てしまうのだと思います。

6. 研究成果

(1) 多変量の関係について

生徒たちは、多変量である複比例の関係について、写真を撮ることに潜む3つの数量の関係（カメラからの距離・画面上の大きさ・被写体の大きさ）から探ることを通して、改めて考えを深めることができたと感じている。先述したように、写真を撮るという行為は生徒たちにとって非常に身近であり、3つの数量の関係については、感覚的に把握しやすい。そのため、議

論の中でも比例，反比例という根拠ではなくとも，大きくなる，小さくなるという感覚的な根拠をもとに考えることができていた。以下の生徒たちの記述から，現実の世界で抱くことのできる感覚的な根拠を数学の世界で学んだ比例・反比例と結び付けて根拠とすることで，現実の世界と数学の世界を往還しながら，複比例の関係について考えを深めることができていたと考えられる。

- ・2つの変数の関係といくつかの要素（3つの変数のうちのどれか）がわかっていたら，写真が撮れたり他のことでも求めたいものが求められたりするのではないかと思った。
- ・今回は変数が3つあり，複雑だったけれど，2つの変数の関係はどんな物事にもあり，その成り立っている物事ごとの中で，2つの変数の関係は大事な役割であることがわかった。
- ・写真で学んだ3つの関係は速さの関係のようにとらえることができると思う。今回は被写体の大きさ・カメラからの距離・画面上の大きさのうち，2つの要因と比例定数がわかれば，もう1つの要因を導き出せることだった。
- ・3つの数のうち，1つを固定すると，2つの関係が把握できるので，固定されている数を変化させることで様々な数で求められることがわかった。

（2）比例・反比例の関係をとらえ直すことについて

本教材の中で，実験I～実験IIIの関係はそれぞれ比例や反比例であるものの，固定するものによってそれらの関係が移り変わるところが複比例教材の魅力である。これまで生徒たちは比例の教材，反比例の教材として比例と反比例の学習を別々にしてきた。本研究では，それらを一体的にとらえたことで，それぞれの関係が別物ではなく，見方を変えることで一体にとらえることができると再確認できたのではないかと思う。本単元を学習後，本単元に関するレポートを生徒たちに課した。その中で，授業内では扱わなかったが，「（カメラからの距離）×（画面上の大きさ）＝20×（被写体の大きさ）」と3つの数量関係を一体として公式化する生徒の姿も見られた。このことから，比例と反比例の関係を一体としてとらえることができたのではないかと考えられる。

（3）みなすことのよさについて

これまででは与えられた整った値から比例や反比例の関係をとらえていたが，自分たちで実験した値を用いて3つの数量関係を探ったことで，生徒たちはみなすことについてより深く触れることができたのではないかと考えられる。第10時で「みなす」という単語を

初めて生徒たちに示したが，それまでに「約」という表現を用いて2つの数量関係を位置づけようとしたり，「平均値」を用いて2つの数量関係を導いたりした。これらを経験してみなすことのよさについて話し合ったことで，みなすという行為が数学の問題を解くときに用いる作業的なものではなく，「その先の議論を進めるための仮説を立てること」と実用的なものであると感じることができた。現実の世界と結び付けて考えることで，何かしらの基準をもとにするものの大切さを生徒たちは学んだ様子だった。

一方で，みなすことの弱さについても生徒たちは本単元を通じて感じた様子だった。第11～13時において，授業者が示した写真と同様の写真を，実際に自分たちで正確に撮ろうとしたとき，多少のズレが起きてしまった。自分たちがこれまで行ってきた，みなすという行為を振り返り，ズレが起ってしまった原因を探ることで，みなすという行為にはおおまかな関係性を探ることによさがあるものの，そこに正確性を求めようとするときズレが起こる場合もあるという弱さを認識することができた。

いずれも実際に実験を行うことで，みなすことについて考えを深めることができた。以下の生徒たちの記述から，第2・3学年からではなく，第1学年から比例・反比例においても考えていくことで中学校3年間を通した継続的なモデリング指導ができると改めて実感した。

- ・「みなす」だけで結果（実験）から式を導き出すことができました。これに気づいたときは本当にすごいと思いました。みなすことで比例なのか反比例なのかを考えられるし，仮説を作ることもできると思うからです。
- ・比例なのか約比例なのかの議論があったと思うけど，目的は「似たような写真を撮ること」だったため，みなすことによって2つの関係から特徴を見出せ，考えやすく議論が一段階進んだような気がした。
- ・みなすことで頭の中に比例の式が浮かんだ状態で定数について考えたり，いろいろと根拠について考えたりすることができた。
- ・誤差がどこまでかわからなかったが，「みなす」ことによって，だいたい位置がわかると知った。誤差もあることを頭に入れてながらみなすことも大切なのだと思う。
- ・ものの見方を一段階進めることで，進めた先の階段が楽に登れるようになるものだと感じた。しかし，正確性に欠け，頭には「だいたい」がつくこともわすれてはならない。

7. まとめと今後の課題

(1) 複比例を取り入れた単元開発と実践を通して

本研究において、複比例を取り入れた単元を開発し、その実践をすることで、これまで学ぶことのなかった多変量の関係について考えを深めることができたこと、比例・反比例の関係をとらえ直すことができたこと、という複比例を扱う価値を改めて感じることができた。3つの数量関係を考えていく複雑さ、煩雑さがあるため、1つ1つを整理して考え進めていかないと生徒たちの混乱を招いてしまう恐れのある難しさのある題材ではある。しかし、多数の要素が絡む事象が多い現実の世界を生き抜く生徒たちにとって、関係する複数の要素を整理して考え進めるという経験は、非常に大切な経験であるといえるだろう。

(2) 今後の課題

本題材は生徒たちの実験によって得た値から数量関係を導いた。その過程でデータをどのように整理していかかが課題となった。今回は実験をもとに進んでいくため、生徒たちの中に明確な基準があるわけではない。そのため、実験で得たデータから関係性を導く中で基準の定め方に難しさを感じた。生徒たちはよく平均値を用いて考えていたが、授業の最中には最頻値や中央値といった代表値に触れる発言もあった。また、外れ値においても、グラフ化したときの見た目や比例定数を計算したときの他の値とのズレで判断していたが、図7の生徒のように小学校で学んだ経験のあるドットプロットと結び付けて考えることで外れ値においてもより考えを深めることができる。

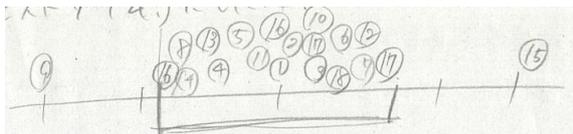


図7 ドットプロットを用いて誤差について
考えている生徒のあらわれ

統計領域の内容は授業時数の関係からあまり深めることはできなかったが、みなすことについて関数領域で触れる際には、統計領域の内容にも触れ、領域を往還しながら授業を展開していくことで、みなすことに対する考え方の広がりの可能性を考えていきたい。

引用・参考文献

- 藤原大樹(2012).中学生による数学的モデリングを目指した近似の考えの継続的指導の必要性,日本科学教育学会年会論文集,36,113-116.
https://doi.org/10.14935/jssep.36.0_113
- 銀林浩(1975).量の世界 構造主義的分析(pp.182-193).麦書房.

日向昭子(2022).主体的に学ぶ生徒の育成～数学を活用する態度を育てる授業の工夫～.関東甲信静数学教育研究山梨大会発表用資料.

池田敏和(1999).数学的モデリングを促進する考え方に
関する研究.日本数学教育学会誌数学教育学論
究,71・72,3-17.

https://doi.org/10.32296/jjsme.81.R7172_3

小寺隆幸(2005).中学校における二変数関数の指導につ
いての考察,学芸大数学教育研究,17,49-58.

小寺隆幸他(1991).特集 中学校授業研究複比例. 数学教
室, 国土社, 37(10), 8-50.

松井幹夫他(1968).授業研究“複比例”. 数学教室, 国
土社, 14(10), 32-56.

裕元新一郎(2007).算数・数学科以外の教科で使われて
いる数学的表現:中学校理科教科書における「とも
なって変わる量」の記述の分析,金沢大学教育学部
教育工学研究・実践研究,33,19-29.

文部科学省(2018a).中学校学習指導要領(平成29年告
示).東山書房.

文部科学省(2018b).小学校学習指導要領(平成29年告
示)解説算数編.日本文教出版.

文部科学省(2018c).中学校学習指導要領(平成29年告
示)解説数学編.日本文教出版.

文部省(1943a).数学(中學用)1第一類.中等學校教科
書株式會社.

文部省(1943b).数学(中學用)2第一類.中等學校教科
書株式會社.

文部省(1958).中学校学習指導要領.

<https://erid.nier.go.jp/files/COFS/s33j/chap2-3.htm>
(2022.12.31 参照)

文部省(1969).中学校学習指導要領.

<https://erid.nier.go.jp/files/COFS/s44j/chap2-3.htm>
(2022.12.31 参照)

永田潤一郎(2004).「比例するとみなす」ことのよさに
ついての考察.日本数学教育学会誌,86(3),13-20.

https://doi.org/10.32296/jjsme.86.3_13

齋藤忠之(2016).中学校数学科における複比例を取り入
れた単元開発:中学校1年「直径1mのランドルト
環を600m先から判別できた場合の視力はいくつ
か」の実践から.上越教育大学学校教育実践研究セ
ンター教育実践研究,26,55-60.